

► Wiskundeonderwijs nu

S. P. van 't Riet

Inleiding

Recensies en boekbesprekingen zeggen meestal minstens zo veel over de opvattingen van de recensent, als over de inhoud van het besproken boek en de ideeën van degene die het schreef. In dat licht moet men ook onderstaande bespreking lezen van het boek 'Wiskundeonderwijs nu' van Bram Lagerwerf, in 1982 uitgegeven bij Wolters-Noordhoff en inmiddels voor de tweede maal gedrukt. Ik heb slechts mijn eigen indruk weergegeven, wat ik in het boek gevonden heb en wat ik er in gemist heb, wat mij enthousiast maakte en wat mij teleurstelde. Wie werkelijk wil weten wat er voor hem of haar in het boek te vinden is, zal het zelf moeten lezen.

De inhoud van het boek

Het boek 'Wiskundeonderwijs nu' is een boek over het werk van wiskundeleraren. Het biedt, zoals de auteur in zijn inleiding schrijft, allerlei ideeën over hoe een wiskundeleraar zijn werk al of niet zou kunnen aanpakken. Het boek is vooral praktisch van aard. Voor zover er theorie in voorkomt, wordt deze aan de hand van vaak vele concrete voorbeelden direct toegepast op het werk van de leraar in de klas. Dat werk, dat een leraar doet in en ter voorbereiding op de les, vormt de belangrijkste optiek van

het boek. Steeds wordt de vraag gesteld: wat doe je als leraar met deze kennis?¹ Dat is de verdienste van dit boek, maar tegelijkertijd ook zijn beperking. Verdienste, omdat niet eerder een Nederlands boek over wiskundendidactiek geschreven werd zo nauw aansluitend bij de klaspraktijk.

Vele voor elke leraar zeer goed herkenbare situaties, problemen en vragen passeren al lezend de revue. De tekst is nergens saai of droog door een te veel aan abstracte speculatie. Eerder hebben de voorbeelden een enkele keer door aantal of uitweiding de neiging wat langdradig te worden, maar echt storend is dat niet.

Om het boek zo concreet te kunnen maken heeft Lagerwerf het geschreven op het huidige wiskundeonderwijs, zoals de titel al duidelijk verwoordt. Veelvuldig wordt in de voorbeelden lesmateriaal uit bestaande wiskundemethoden gebruikt, waarbij stukken tekst van die methoden worden afgedrukt. We komen leerstof tegen uit o.a. Moderne Wiskunde, Getal en Ruimte, Van A tot Z en Passen en Meten. Dat maakt het boek levendig. Maar gezien de snelheid waarmee wiskundemethoden vandaag de dag veranderen, vraagt men zich af, hoe lang dit boek in zijn huidige vorm actueel zal blijven. Hier treffen we dan ook een van de voornaamste beperkingen van dit boek aan. De aandacht voor de ontwikkeling waarin het wiskundeonderwijs zich momenteel bevindt is niet afwezig, gezien bijvoorbeeld de verwijzing die af en toe plaats vindt naar nieuwer lesmateriaal², maar erg veel zicht geeft het boek niet op deze 'macro'-kant van het wiskundeonderwijs. We moeten de verdienste van het boek daarom vooral zoeken in het feit, dat hier een verdiepend beeld wordt gegeven van de dagelijkse lespraktijk van de wiskundeleraar.

De behandelde onderwerpen

In negentien hoofdstukken worden vele aspecten van het lesgeven in wiskunde behandeld. De auteur begint daarbij met vier hoofdstukken over leerstof, het punt waar ook vele leraren zullen beginnen bij het nadenken over hun onderwijs. Die hoofdstukken gaan achtereenvolgens over getallen, vergelijkingen, verzamelingen en functies. Dit is naar mijn

indruk niet een willekeurige keuze van de auteur. Deze onderwerpen gaan stuk voor stuk over centrale begrippen in het huidige wiskundeonderwijs, centraal soms tot verdriet van Lagerwerf, zoals in het geval van verzamelingen, die hem zelfs een oproep tot een soort burgerlijke ongehoorzaamheid ontlokken³. Naast een 'instap'-functie hebben deze vier hoofdstukken nog een andere functie in het boek. De auteur verwijst er in zijn verdere tekst van tijd tot tijd naar om zijn betoog te illustreren. Ook ten aanzien van andere onderwerpen is er de tendens de verschillende delen van het boek op elkaar te betrekken. Dat maakt mede het boek tot een geheel, waarin alles met alles samenhangt, maar heeft tevens tot gevolg dat men het boek in een betrekkelijk korte tijd moet lezen om er profijt van te kunnen hebben.

De tien hoofdstukken die daarna volgen, gaan allemaal over het onderwijsleerproces in de klas, het proces van interactie en communicatie, waarbij de leraar de zaken zo regelt dat de leerling op een zinvolle manier wiskunde leert. Onder andere komen aan de orde:

- voorbeelden geven,
- wiskunde tastbaar maken,
- denkschema's,
- het beginnen van een les,
- de niveautheorie van Van Hiele,
- leerlingactiviteiten,
- uitleggen,
- verwerken van leerstof.

Steeds komt naar voren dat het in het onderwijs gaat om het leren van de leerling en dat het onderwijzen van de leraar daaraan ten dienste moet staan. Of, om Lagerwerf te citeren: 'de school is een leerinstituut en geen werkgelegenheidsproject voor leraren.' En: er zijn leraren die 'vergeten dat onderwijzen een karwei is voor twee. Ze vergeten de leerlingen in te schakelen bij wat ze doen... Een leerling kan alleen iets leren als hij iets doet dat tot leren leidt.' Dit uitgangspunt loopt als een rode draad door het verdere van het boek en de auteur werkt dit thema op allerlei manieren uit. Na deze tien hoofdstukken komen er twee over:

- lesplan maken en
- doelen van wiskundeonderwijs.

Daarna zijn er nog drie hoofdstukken die dieper ingaan op onderwerpen die al eerder behandeld

zijn:

- voorbeelden geven;
- denkschema's;
- niveautheorie.

Het boek bevat voorts een literatuurlijst en een index.

Ondanks de veelheid aan belangrijke onderwerpen die in het boek besproken worden, zijn er ook een aantal die voor elke leraar van grote betekenis zijn, maar nauwelijks of alleen zijdelings aan de orde komen. Zo wordt bijvoorbeeld aan het onderwerp 'toetsing' slechts heel terloops aandacht besteed, terwijl het daarbij toch om een invloedrijk aspect van het onderwijs gaat. Ook bij het onderwerp 'differentiatie' wordt nergens uitgebreid stilgestaan, hetgeen te betreuren is aangezien juist op dit punt de huidige wiskundemethoden vaak zo heel verschillende wegen bewandelen. Het boek beperkt zich grotendeels tot het onderwijsleerproces in engere zin. Maar dat wordt dan ook van allerlei kanten doorgelicht.

Persoonlijke stellingname en stijl

Een van de meest opvallende kenmerken van 'Wiskundeonderwijs nu' is, dat het op een zeer persoonlijke manier geschreven is. Het boek is door Lagerwerf voor het grootste deel gesteld in de ik-vorm. Daarbij spreekt hij de lezer vaak rechtstreeks aan, alsof deze bij hem in de kamer of in het lokaal zit. Dat maakt het boek niet alleen tot een boek over wiskundeonderwijs en wiskundendidactiek, maar ook tot een persoonlijk document van een wiskunde- en vakdidactiekdocent die op een intensieve wijze met zijn professie bezig is. Zo zet Lagerwerf zich van tijd tot tijd af tegen bepaalde tendensen in het vroegere en in het huidige wiskundeonderwijs⁴, plaatst vraagtekens bij alledaagse gewoonten in het onderwijzen van wiskunde⁵, en neemt in heel wat kwesties stelling of trekt persoonlijke conclusies, die vele lezers lang niet altijd vanzelfsprekend zullen vinden en die ook niet altijd grondig onderbouwd worden. Daarbij kan men soms saillante uitspraken noteren, zoals bijvoorbeeld: 'Het is met relaties eigenlijk net zo als met verzamelingen: ze zijn per ongeluk in het voortgezet onderwijs te-

rechtgekomen...'⁶. In hetzelfde betoog zegt Lagerwerf er geen goed woord voor over te hebben dat sommige schoolboeken eerst relaties en daarna functies als een bijzonder soort relaties behandelen⁷.

Deze persoonlijke stijl en stellingname kunnen zeer geschikt zijn voor wat de auteur zegt met het boek te beogen: 'Een op de praktijk gerichte didactische handreiking aan wiskundeleraars' (aldus de ondertitel van het boek). De lezer zal veel aan dit boek kunnen hebben, als hij die hand wil aannemen en met dit boek het gesprek over het onderwijzen van wiskunde wil aangaan. En daar beginnen dan bij mij enige aarzelingen te rijzen omtrent de bedoelingen van Lagerwerf, want aan het slot van een paragraafje van het inleidende nulde hoofdstuk, waarin wordt uitgelegd dat 'Wiskundeonderwijs nu' een leerboek is en geen wetenschappelijke verhandeling, leest men⁸:

'Dit boek is geen discussiestuk. Als u het hier of daar niet eens bent met wat u leest, of als u helemaal niet snapt wat er staat, dan kunt u dat stuk beter overslaan. Het gaat er niet om dat ik niet voor kritiek vatbaar zou zijn, integendeel. Ik denk echter dat het handiger is uw energie te steken in passages waar u wel iets aan hebt.'

Als ik als wiskundeleraar dit boek ter hand zou nemen, zou ik dat niet op me laten zitten. De kritische zin die ik mijn leerlingen zou willen bijbrengen en de vasthoudendheid te willen begrijpen wat niet direct begrepen wordt, is een leereigenschap die ik mij zelfs door een didactiekdocent niet zou laten ontzeggen. Openbaart zich hier al vroeg in het boek een zekere tweeslachtigheid, die men al lezende vaker lijkt te kunnen bespeuren? Het boek is uitgegeven voor (ervaren) wiskundeleraars (gezien de ondertitel), maar duidelijk geschreven vanuit de opleiding tot wiskundeleraar en daar kennelijk mede weer voor bedoeld. Studenten in opleiding kan men wellicht een leerboek aanbieden en daarbij het al te snel overgaan tot discussie afraden, maar ervaren docenten die hun vak willen bijhouden of hun functioneren willen verbeter-

ren... Daarbij komt dat discussie een uitstekend middel tot leren kan zijn, temeer als het gaat om zaken waarover men verschillend kan denken en waarop verschillende visies mogelijk zijn. En met dergelijke zaken houdt 'Wiskundeonderwijs nu' zich – terecht – regelmatig bezig. Want ook didactiek van de wiskunde is een vorm van sociale wetenschap en daarin zijn strijdige theorieën mogelijk!⁹ Het is nu juist de zeer persoonlijke stijl van dit boek die het boeiend maakt. Een leerboek echter dat niet geschreven wordt voor onmiddellijke discussie, veronderstelt meer distantie van de schrijver tot zijn stof. Bij een leerboek behoort de schrijver niet geregeld hinderlijk tussen de lezer en de leerstof in te staan. Begrijp mij goed: ik vind het meestal niet hinderlijk Lagerwerf om de andere bladzijde van dit boek tegen te komen, want zijn ideeën en stellingnamen zijn de moeite waard om mee bezig te zijn, maar daardoor is dit boek mijns inziens als leerboek minder geschikt. Hinderlijk wordt de aanwezigheid van de auteur in de tekst echter wel als hij niet alleen maar zijn eigen opvattingen geeft, maar ook nog eens de lezer op zijn nek gaat zitten met opmerkingen, hoe deze het boek zou moeten gebruiken¹⁰. In een voorwoord kan dat nog op zijn plaats zijn, maar in de tekst niet. Vanaf halverwege het boek begint deze neiging steeds vaker voor te komen. En als het verantwoordelijkheidsgevoel van de auteur voor het overkomen van zijn pennevrucht zo ver gaat, dat hij opmerkt zijn stof liever mondeling met u te willen doornemen en verwerken¹¹, dan overschrijdt hij mijns inziens een grens die de lezer als een te grote bemoeizucht maar door de vingers moet zien.

Daarom zou ik er voor willen pleiten dit boek wel degelijk tegen de bedoeling van de auteur in als een discussiestuk op te vatten. Eerst dan komt het naar mijn oordeel tot zijn volle recht. Men kan dit boek geen slechtere dienst bewijzen dan het maar voor zoete koek te slikken. En dat niet alleen in de studeerkamer, maar ook in de lerarenopleiding.

Een zeer concreet boek

Men late zich dus door bovenstaande oneffenheden niet terugschrikken het boek van Lagerwerf ter hand te nemen, want als men er tegen kan eens

dingen te lezen of te horen die ingaan tegen allerlei dat men jarenlang voor vanzelfsprekend heeft gehouden, dan zal men van de aanwezigheid van de auteur in de tekst geen last hoeven te hebben. Het boek zet sterk aan tot nadenken over bestaande praktijken binnen het huidige wiskundeonderwijs en staat desondanks stevig met beide benen op de grond van datzelfde huidige wiskundeonderwijs. In dat opzicht dekt de titel van het boek de inhoud in grote mate. 'Meer pragmatisch dan idealistisch' noemt Lagerwerf dat zelf¹². En daarmee heeft hij de Nederlandse literatuur op het gebied van de didactiek van de wiskunde ontegenzeggelijk verrijkt.

Het boek staat vol met praktijkvoorbeelden van hoe de dingen gaan in het wiskundeonderwijs of hoe de leraar het ook zou kunnen doen. Elk hoofdstuk heeft een duidelijk onderwerp. De belangstelling van de auteur gaat met name uit naar de wijze waarop leerlingen wiskunde leren. Daarom is er veel aandacht voor de leerpsychologische aspecten van het wiskundeonderwijs. Het werken aan de voorstelling, mentale schema's, de aanschouwing leidt bijvoorbeeld bij de invoering van het wortelbegrip tot de keuze van het schema 'lengte van de zijde van een vierkant bij gegeven oppervlakte'¹³. Aandacht voor het materialiseren van wiskunde is aanwezig¹⁴. Hoofdstuk 6 is zelfs geheel gewijd aan 'handwerk' en in hoofdstuk 15 wordt de methode van Galperin toegepast op merkwaardige producten. De aandacht voor dit aspect van wiskundelezen is toe te juichen, aangezien het tot op heden onderbelicht is geweest in de didactiek van het voortgezet wiskundeonderwijs.

In het boek zijn verder vele concrete ideeën en aanbevelingen te vinden over hoe bepaalde leerstof behandeld zou kunnen worden. Ik noem bijvoorbeeld het vertellen van miniverhaaltjes bij rekenommen en bij lineaire vergelijkingen, of zoals Lagerwerf het noemt het heen en weer pendelen tussen concreet en abstract¹⁵. Ook de behandeling van de niveautheorie van Van Hiele is erg concreet, hoewel niet steeds even helder. Met name geldt dat voor hoofdstuk 10 en het is mijns inziens een gevolg van de verhaaltrant waarmee Lagerwerf vele onderwerpen behandelt. Het betoog is daardoor niet altijd even duidelijk van opzet. Paragraaf 2 van hoofdstuk 19, waarin de theorie van Van Hiele nogmaals

wordt behandeld, is daarentegen veel helderder en zou ik aanraden te lezen direct na hoofdstuk 10. Overigens past Lagerwerf naar mijn indruk de niveautheorie van Van Hiele niet alleen toe op de wiskunde van het voortgezet onderwijs, maar ook op de stof van zijn eigen boek. Het concrete ervan en de vele voorbeelden erin bedoelen vooral een basisoniveau te leggen. De bespreking die in het algemeen op de voorbeelden volgt kan dan gezien worden als een eerste-niveaubehandeling van de stof. Het tweede, meer theoretische niveau bereikt het boek zelden, maar dat wil de schrijver kennelijk ook niet. De bespreking die bijvoorbeeld in hoofdstuk 16 gewijd wordt aan de doelen van het wiskundeonderwijs vertoont sterk de trekken van een soort basisoniveau en men kan zich afvragen of zo'n aanpak wel altijd terecht is als men voor ervaren wiskundeleraars schrijft. Fraai is het scala van vijf stijlen van lesgeven in hoofdstuk 13. Geschikt ook om een discussie tussen collega wiskundeleraars op gang te brengen over de vraag welke rol de leraar nou eigenlijk in de klas zou moeten spelen. En zo zijn er nog veel meer onderwerpen te noemen.

Visie op wiskundeonderwijs

In het boek wordt nergens uitgebreid en expliciet een visie op het wiskundeonderwijs gegeven. Maar zelfs als de auteur opmerkt dat het allemaal niet zo heel anders hoeft¹⁶, dan wil dat nog niet zeggen dat hij geen visie zou hebben op waar het in het wiskundeonderwijs om gaat. Alleen moet men die visie hier en daar uit de tekst bijeenbrengen. In die visie staan de leerlingen zeer centraal. Het onderwijs is er voor hen en moet daarom uitgaan van problemen die hen aanspreken en vragen waar zij zelf mee komen¹⁷. Ook zal de leraar er op uit moeten zijn de leerling te helpen zelf zijn probleem op te lossen. Voordoen en voorzeggen maakt de leerling afhankelijk van de leraar. Daarom doet de leraar er beter aan hints te geven of vragen te stellen die de leerling een klein beetje verder helpen. Ook vragen over de manier van werken van de leerling kunnen hem helpen zelf verder te komen¹⁸. Duidelijk is dat de leerstof gepresenteerd moet worden op een wijze die nauw aansluit bij de manier waarop kinderen

leren. Dus niet de logica van de wiskunde, maar de psychologie behoort de keuze en ordening van de leerstof te bepalen¹⁹. Een ander terugkerend thema dat hierbij aansluit is de bevordering van zelfstandigheid van de leerlingen. Of zoals Lagerwerf het formuleert: 'Zó te onderwijzen dat de leerlingen het elke volgende keer een beetje beter zonder u kunnen'²⁰. Maar erg diep gaat hij op dit laatste onderwerp niet in en dat is jammer, want daardoor komt het niet echt uit de verf. Daarnaast wordt ook het leren samenwerken van leerlingen als een belangrijk onderwijsdoel op lange termijn gezien. Hieraan wordt een korte, maar handzame bespreking gewijd²¹.

Hoewel er veel goede elementen in deze visie zitten, kan men er toch een aantal discussievraagtekens bij plaatsen. Is het onderwijs er eigenlijk wel alleen voor de leerling als individu al of niet samenwerkend met anderen? Of is het er minstens zo zeer voor de gemeenschap, de maatschappij, de cultuur? Van welk mensbeeld moet het wiskundeonderwijs en in het algemeen het onderwijs uitgaan? Helpen we de leerlingen echt als we altijd maar voor hen klaar staan om aan te sluiten bij hun eigen vragen en problemen? Of moeten we juist de vragen- en problemenhorizon van de leerlingen doelbewust vergroten? Is samenwerking wel steeds nuttig voor het leren van wiskunde? Of is een individuele benadering van leerlingen soms voordeliger voor hun ontwikkeling? Ik wil door deze vragen te stellen niet suggereren dat ik de visie van de auteur onjuist of verwerpelijk zou vinden, maar ben wel van mening dat er vanuit een breder kader over deze dingen nagedacht en gediscussieerd moet worden. Dit zijn zaken van schoolwerkplanontwikkeling die het klaslegebeuren en het werk van de individuele leraar te bovengaan.

Het gebruik van het boek

Hoe men het boek 'Wiskundeonderwijs nu' wil gebruiken, moet ieder natuurlijk zelf weten. Ik zou in deze paragraaf echter een suggestie willen doen. Zoals reeds vermeld wil ik het boek met name zien

als een discussiestuk. Vooral als het door leraren wordt gelezen en gebruikt, die enkele tot vele jaren ervaring hebben in het wiskundeonderwijs. Zeer bruikbaar is het boek als het met een groep leraren, bijvoorbeeld een hele sectie, wordt besproken. Men kan dan de volgende werkwijze volgen.

Elke bijeenkomst wordt één hoofdstuk van het boek besproken. Iedere deelnemer leest dit hoofdstuk van te voren grondig door en formuleert naar aanleiding van de tekst één of meer vragen of gesprekspunten. Aan het begin van het gesprek wordt een ronde gehouden en ieder deelt zijn vragen of gesprekspunten mee en licht die eventueel toe. Deze worden door de andere deelnemers goedgekeurd en tijdens de discussie zo nodig geraadpleegd om verbanden te leggen, elkaar nader te bevragen of om nieuwe onderwerpen in het gesprek te brengen. Men begint de discussie echter pas als men de ronde gemaakt heeft en de vragen of opmerkingen van alle deelnemers op tafel zijn gelegd. De discussieleider ziet er op toe dat alle deelnemers zo veel mogelijk aan hun trekken komen en stimuleert de groep de belangrijkste van de aangedragen vragen en punten te selecteren en te bespreken. Men kan dergelijke gesprekken voeren uitsluitend met de bedoeling dat de deelnemers elk er hun voordeel mee doen. Men kan mijns inziens dergelijke gesprekken beter niet voeren om tot consensus te komen, bijvoorbeeld ten aanzien van een schoolwerkplan. Wel zou op basis van dergelijke discussies doorgedaan kunnen worden om tot een groeps- of sectiestandpunt te komen in allerlei zaken die het wiskundeonderwijs betreffen. Maar dan moet men zich al van het boek van Lagerwerf hebben 'losgemaakt'.

Bovenstaande werkwijze volgde ik zelf met vierdejaars studenten wiskunde in de lerarenopleiding. De meeste studenten, die allen reeds een aantal schoolpraktika achter de rug hadden, ervoeren deze werkwijze als een zinvolle manier van leren nadenken en discussiëren over eigen onderwijs. Natuurlijk kan men het boek op nog vele andere manieren gebruiken. Het bovenstaande is slechts een idee om ook wiskundeleraren niet al te individueel met hun onderwijs te laten bezig zijn. Tenslotte is het onderwijs geen zaak van individuele leraren, maar van schoolgemeenschappen.

Tenslotte

Er zou over het boek 'Wiskundeonderwijs nu' nog veel meer zijn te zeggen. De discussie die ik erover bepleit tussen wiskundeleraren onderling, behoort echter niet alleen in een tijdschrift te worden gevoerd, maar vooral in het klaslokaal en in de docentenkamer. Ik hoop dat de eerste druk van dit boek reeds veel gespreksstof heeft doen opwaaien en dat de tweede druk dat minstens zo veel zal doen. Dat zal het wiskundeonderwijs in Nederland ten goede komen.

Noten

- 1 Titel van par. 5 van hoofdstuk 8, p. 54.
- 2 Enkele van de weinige wijzigingen in de 2e druk t.o.v. de 1e hebben met dit aspect te maken. Zo is op pag. 61 de vermelding van IOWO-materiaal vervangen door de vermelding van 'contextrijk leermateriaal'. Op pag. 54 is 'onvoldoende lesmateriaal' dat uitgaat van problemen die de leerlingen aanspreken, vervangen door 'waar gelukkig steeds meer materiaal voor beschikbaar komt'.
- 3 Pag. 24.
- 4 B.v. op pag. 9 en 21 e.v.
- 5 Pag. 10-12
- 6 Pag. 30
- 7 Pag. 30
- 8 Pag. 8
- 9 Pag. 52
- 10 B.v. pag. 112
- 11 Pag. 99 en 166
- 12 Pag. 7
- 13 Pag. 9-11
- 14 Pag. 11
- 15 Pag. 14 en 17
- 16 Pag. 12
- 17 Pag. 54, 59 en 142
- 18 Pag. 48 en 62
- 19 Pag. 30, 95 en 127
- 20 Pag. 108. Vergelijk ook pag. 126
- 21 Pag. 147-148