

Zes kennisnivo's Een nadere uitwerking

S. P. van 't Riet

Inleiding

In een vorig artikel (Van 't Riet, 1983) heb ik een model van zes kennisnivo's beschreven ter ondersteuning van de didaktiek van de wiskunde. In dit artikel wil ik een poging wagen de rol, die dit model in het wiskundeonderwijs zou kunnen spelen, nader uiteen te zetten aan de hand van een aantal voorbeelden. Daartoe zal ik het model eerst kort samen vatten.

Het model van de kennisnivo's

Het gaat in het model van de zes kennisnivo's vooral om de aard van de in het geheugen opgeslagen informatie. Voor het wiskundeonderwijs is het nuttig zes verschillende soorten kennis te onderscheiden:

- materiële kennis;
- verbale kennis;
- konkreet-mentale kennis;
- konkreet-symbolische kennis;
- abstrakt-mentale kennis;
- abstrakt-symbolische kennis.

Deze zes soorten kennis zijn onder te verdelen in twee groepen: taal- en betekeniskennis. Binnen elk der groepen is een nivo-indeling aan te brengen, waarbij beide nivo-indelingen min of meer parallel lopen. In figuur 1 is het model schematisch weergegeven.

Voor het goede begrip geef ik van de zes kennisnivo's de volgende omschrijvingen met voorbeelden. Eerst behandel ik de drie betekenisknivo's (a, c en e), daarna de drie taalnivo's (b, d en f).

a Het materiële kennisnivo

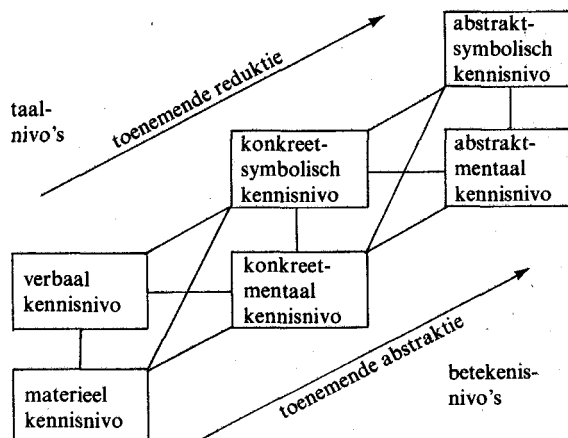
De informatie van dit kennisnivo is opgedaan door middel van manipulaties met materiële voorwerpen of door middel van directe waarneming. Men kan hier denken aan kennis opgedaan bij het manipuleren met uitgeknipte driehoeken, het verleggen van blokjes, het bekijken van figuren, enz.

c Het konkreet-mentale kennisnivo

Hier gaat het om voorstellingen, gedachtenplaatjes, welke men in het geheugen heeft opgeslagen. Deze gedachtenplaatjes of mentale schema's kunnen functioneren zonder het directe contact met materiële voorwerpen waaraan zij zijn ontleend. Wel bezitten zij nog vele kenmerken van die materiële voorwerpen. Men kan van kennis op dit nivo spreken als de leerling zich een driehoek voorstelt als een zeer bepaalde scherphoekige driehoek met horizontale basis, zonder dat alle mogelijke andere standen en vormen van driehoeken in de voorstelling een rol spelen.

e Het abstrakt-mentale kennisnivo

Hier gaat het om een voorstelling van zaken waarbij vele konkrete details die niet essentieel zijn voor een begrip, uit de voorstelling zijn verdwenen of zodanig variabel zijn dat het hele begrip in de voorstelling vertegenwoordigd is. De meetkundige lijn verliest zijn dikte. Stomp-, recht- en scherphoekige driehoeken worden tot één voorstelling verenigd, waarbij een element van variabiliteit zijn intrede doet. De voorstelling van de driehoek



Figuur 1 Schematische voorstelling van het model van de zes kennisnivo's ten behoeve van het wiskundeonderwijs.

wordt als het ware een film, waarin de driehoek alle mogelijke standen, hoekverdelingen en grootten kan krijgen.

Het zal duidelijk zijn dat het onderscheid van deze drie betekenisnivo's moet worden opgevat als gebieden op een continuüm en niet als diskrete toestanden. De drie betekenisnivo's staan in nauwe verbinding met de drie taalnivo's.

b Het verbale kennisnivo

Hier gaat het om kennis op het gebied van de dagelijkse omgangstaal. De woorden 'driehoek', 'zijden', 'hoeken', 'basis', 'hoekpunten', etc. spelen een rol in het spreken, schrijven en lezen over driehoeken. Een leerling zal zinnen moeten kunnen 'ontleden', er onderwerp, werkwoord, lijdend voorwerp en andere zinsdelen snel uit kunnen halen – ook zonder deze taalkundige termen uit de zinsontleding te kennen. Veel verbale kennis zal in de vorm van automatismen worden aangewend. Deze taalvaardigheid zal in het algemeen buiten het wiskundeonderwijs ontwikkeld zijn. Toch is hier enige zorg van de wiskundeleraar nodig, daar het wiskundeonderwijs tal van nieuwe elementen aan de dagelijkse omgangstaal toevoegt.

d Het concreet-symbolische kennisnivo

Op dit nivo vindt een reductie van de omgangstaal plaats met betrekking tot concrete voorwerpen of begrippen. In plaats van te spreken over 'het hoekpunt links onder' voeren we voor dit hoekpunt de letter *A* in. *A* is hierbij nog de aanduiding voor een zeer bepaald hoekpunt van een zeer bepaalde (materiële of concreet-mentale) driehoek. Tot dit kennisnivo behoren ook de aanduidingen voor getallen in de vorm van cijferkombinaties: 1, 2, 3, 3825, $5\frac{1}{2}$, 8.45, enz.

f Het abstrakt-symbolische kennisnivo

Hier gaat het om het gebruik van symbolen die niet meer naar enkelvoudige dingen of begrippen verwijzen. Deze symbolen spelen een rol bij het schrijven of spreken over grotere gehelen. In de wiskunde gaat het hier vooral om variabelen en kwantoren.

De wijze waarop de kennis van deze drie taalnivo's in de wiskunde wordt gebruikt, zal vrijwel steeds een mengmoes zijn van elementen ontleend aan alle drie nivo's. Met name het gebruik van symbolen is bijna altijd ingebed in woorden en zinnen van de gewone omgangstaal. Verder is het duidelijk dat de kenniselementen van de drie taalnivo's hun

betekenis ontleen aan de verbindingen die er bestaan met de betekenisnivo's. Daar deze verbindingen niet vanzelfsprekend zijn, berusten op conventie en afspraak en dus geleerd moeten worden, verdient het de voorkeur de taalnivo's van de betekenisnivo's te onderscheiden, iets wat in vele psychologische verhandelingen niet gebeurt.

Het model zou kunnen suggereren dat er een paarsgewijze koppeling bestaat tussen materieel en verbaal, concreet-mentaal en concreet-symbolisch, abstrakt-mentaal en abstrakt-symbolisch kennisnivo. Ik zou hiervan niet willen uitgaan. Het is namelijk niet moeilijk voorbeelden te vinden die het tegendeel aantonen. Welke relaties er tussen de taal- en betekenisnivo's liggen, zal nader onderzoek moeten worden als dit model zijn bruikbaarheid voor het wiskundeonderwijs bewezen heeft. Iets van deze vraagstelling zal in het volgende aan de orde komen. Ik zal proberen duidelijk te maken hoe het model van de zes kennisnivo's de leraar kan helpen het denken en redeneren van de leerlingen te begrijpen en te beïnvloeden. Voordat ik daartoe overga, wil ik er met nadruk op wijzen dat men de kennisnivo's niet moet verwarren met de denknivo's van Van Hiele (Van Hiele, 1973, p. 91 e.v.). Gaat het bij Van Hiele om een indeling van denkwijzen of argumentaties, in het model van de kennisnivo's gaat het eerder om een indeling van die kenniselementen die bij het denken en argumenteren worden gebruikt. Om een vergelijking te maken met de bouwkunst: de denknivo's komen overeen met hutten, huizen en paleizen, de kennisnivo's met hout, spijkers, stenen, cement, glas en stopverf. Van de denkprocessen die ik hieronder ga beschrijven, kan men wellicht zeggen op welk nivo van Van Hiele zij zich afspelen. Daar is het mij nu echter niet om begonnen.

Het verloop van het denken

Het model van de zes kennisnivo's kan ons helpen het leer- en denkproces van de leerling te analyseren. Een voorbeeld hoe verschillende nivo's een rol spelen bij het leren van wiskunde, vindt men in de volgende analyse.

Een leraar vraagt aan een leerling: 'Teken eens een rechthoekige driehoek'. De leerling die deze opdracht ontvangt, zal moeten beginnen op het verba-

le kennisnivo. De zin zal moeten worden opgesplitst in een aantal delen, die eventueel van belang zijn om het geheel te kunnen interpreteren. In dit geval zijn het de werkwoordsvorm 'teken' en het lijdend voorwerp 'rechthoekige driehoek', welke onderscheiden moeten worden. Voorts zal 'rechthoekige driehoek' moeten worden opgesplitst in 'driehoek', het substantief, en 'rechthoekig', het adjektief. Bij de meeste leerlingen zal een dergelijke 'zinsontleding' automatisch verlopen, vooral als de zin erg eenvoudig is.

Zijn de belangrijkste bestanddelen van de zin gevonden, dan zal de leerling naar het *konkreet-mentale kennisnivo* moeten overstappen. Bij de woorden zal de betekenis moeten worden opgespoord. De werkwoordsvorm 'teken' moet het beeld oproepen van een handeling met de daarbij behorende hulpmiddelen van papier, potlood, liniaal, gum, enz. Bij de woorden 'rechthoekige driehoek' zal een konkreet-mentaal plaatje van een dergelijke figuur moeten worden gevonden: het gedachtenplaatje of het (konkreet-)mentale schema. Leerlingen verwoorden dit zoeken soms met de woorden: 'O ja, hoe zag die er ook al weer uit?' Het is niet altijd noodzakelijk dat de overstap naar het konkreet-mentale kennisnivo pas gemaakt wordt, als de opdracht op het verbale nivo geheel 'ontleed' is. Het is goed mogelijk dat leerlingen eerst de werkwoordsvorm zoeken. Het woord 'teken' roept zijn konkreet-mentale betekenis op. Daarna stappen ze terug naar de opdracht en vervolgen de verbale ontleding. Nu vinden ze dat wat er getekend moet worden: 'rechthoekige driehoek'. Een aanwijzing dat het zo kan verlopen, vinden we bij iets ingewikkelder opdrachten. Leerlingen reageren dan soms met: 'Ja, ik moet iets tekenen, maar verder snap ik er niets van!'

Als de leerling alle mentale voorstellingen gevonden heeft en tot een geheel heeft verenigd, dan zal hij in ons geval moeten overschakelen naar het *materiële kennisnivo*, waarop hij de handelingen moet beheersen om met potlood en liniaal een tekening van een rechthoekige driehoek te maken. Deze handelingen worden nu vervolgens 'gestuurd' door het konkreet-mentale schema van de rechthoekige driehoek dat hij voor ogen heeft.

Het is mogelijk dat de leerling in de figuur letters bij de hoekpunten plaatst en het L-teken in de rechte hoek. In dat geval heeft hij nog even het *konkreet-symbolische kennisnivo* aangedaan.

We merken op dat in dit voorbeeld het abstrakt-mentale en het abstrakt-symbolische kennisnivo niet voorkomen. Wat het abstrakt-mentale nivo betreft, ligt dit grotendeels aan de vraagstelling van de leraar. Wil de leraar er zich van overtuigen dat de leerling ook over een abstrakt-mentale voorstelling van het begrip *rechthoekige driehoek* beschikt, dan zal hij zoiets kunnen vragen als: 'Tekenen eens een paar heel verschillende rechthoekige driehoeken'. Of hij kan achteraf vragen stellen als: 'Zijn alle rechthoekige driehoeken zo klein?', 'Moet de rechte hoek altijd links onderaan zitten?', 'Kun je een scherpe hoek ook heel klein maken?', enz.

Helpen bij leren en denken

De opdracht en de oplossing die we nu besproken hebben, zijn van eenvoudige aard. Toch kan er bij het oplossen door de leerling al veel misgaan. Als de opdrachten ingewikkelder worden, zal de kans op het maken van fouten eveneens groter worden. Het is voor leraren die hun leerlingen willen helpen, van groot belang tot een goede diagnose van de gemaakte fouten te komen. Dan kan namelijk de leraar zijn hulp optimaliseren: de leerling wordt verder geholpen zonder dat hem al te veel uit handen wordt genomen. Het model van de zes kennisnivo's kan ons helpen de aard van de gemaakte fouten bij de leerlingen op te sporen.

Vele opdrachten worden gegeven in alledaagse taal of in een mengsel van gewoon Nederlands en wiskundige symbooltaal. De leerlingen zullen de opdrachtzinnen eerst moeten ontleden voor zij de opgave kunnen oplossen. Als de opgaven ingewikkelder worden en langere omschrijvingen vergen, hebben met name leerlingen met een weinig ontwikkeld taalgevoel grote moeite met het opsporen van de onderdelen van de zin. Hierbij zien zij woorden over het hoofd, schatten de positie van een woord in de zin verkeerd in, zien bijvoegelijke naamwoorden aan voor zelfstandige naamwoorden of ontdekken de juiste taalkundige relaties niet. Gevolg is dat het verdere denken tal van onoplosbare moeilijkheden ondervindt. De leerlingen raken volkomen in de war. Vaak eisen leraren, zonder er zelf erg in te hebben, heel wat van hun leerlingen op het verbale en op de andere taalnivo's.

Ook bij de overgang van het verbale naar het konkreet-mentale kennisnivo kunnen er allerlei dingen misgaan. De leerling kan bijvoorbeeld een woord of zinsdeel verbinden met een verkeerd mentaal schema. In de opgave 'Tekenen een rechthoekige driehoek' kan het woord 'rechthoekig' bij hem het schema van de rechthoek oproepen, of zelfs de voorstelling van gelijkbenigheid. De juiste verbindingen tussen de woorden en de mentale schema's zijn dan niet gelegd of funktioneren niet. Het is ook mogelijk dat de leerling op het konkreet-mentale kennisnivo helemaal niet beschikt over het schema van de rechthoekige driehoek of dat het zich geheel beperkt tot de zeer bijzondere met hoeken van 90° , 45° en 45° . Een andere mogelijkheid is dat de leerling een andere voorstelling heeft dan de leraar bij het woord 'tekenen'. Hij kan een nette tekening maken zonder liniaal en toch van de leraar te horen krijgen dat het over moet.

Een derde soort moeilijkheden kan zich voordoen bij de overgang naar het materiële kennisnivo. De leerling kan een lijnstuk dat recht moet zijn krom tekenen, omdat hij door welke oorzaak dan ook de kromming niet waarneemt. De rechte hoek kan door een onverhoedse beweging wat stomp uitvallen, of omdat de leerling de geodriehoek niet op de goede plaats weet te krijgen. Het kan zijn dat de leerling te weinig geoefend heeft in het tekenen van dergelijke figuren en dus nooit ervaren heeft aan welke eisen van nauwkeurigheid een tekening moet voldoen. In al die gevallen is zo's tekening natuurlijk geen graadmeter voor de konkreet-mentale kennis waarover de leerling beschikt.

Waar het nu voor de leraar op aankomt, is dat hij zich bij het denken van de leerling steeds afvraagt op welke kennisnivo's het zich afspeelt en welke overgangen tussen de nivo's er gemaakt moeten worden. Een leerling die fouten maakt, maakt die ergens in het denkproces. Het is dan de taak van de leraar er achter te komen, welke fout wáár in het denkproces wordt gemaakt. Als de leraar een goed idee heeft van alle punten waarop er iets mis kan gaan, kan hij de werkelijke fout sneller opsporen en aan het licht brengen. Daarna kan hij de leerling met een vraag of een hint op het goede spoor zetten. Stel dat de leerling na de opgave 'Tekenen een rechthoekige driehoek' een rechthoek tekent. Waar is dan de fout gemaakt? Misschien heeft hij het woord 'driehoek' over het hoofd gezien en het woord

'rechthoekig' als 'rechthoek' gelezen. De fout ligt dan op het verbale kennisnivo. Om er achter te komen of dit inderdaad het geval is, kan de leraar reageren met vragen als: 'Heb je de opdracht goed gelezen?'. Als de leerling daarna zijn fout niet ontdekt, ligt deze waarschijnlijk op het konkreet-mentale kennisnivo of bij de verbinding tussen dit en het verbale kennisnivo. De leraar kan nu verder gaan met vragen als: 'Is dit dan een driehoek?'. Het is mogelijk dat de leerling vervolgens een willekeurige driehoek gaat tekenen. Terug naar het verbale nivo: 'Lees nu nog eens goed', of: 'Over wat voor een driehoek gaat het in de som?', of: 'Voldoet deze driehoek aan de opgave?'. Als de leerling er niet uitkomt, kan de fout weer op het konkreet-mentale nivo liggen. Probeer dit nivo te 'prikkelen' met vragen als: 'Tekenen eens een rechte hoek'. Op deze manier stelt de leraar de leerling in de gelegenheid met behulp van een bekend mentaal schema het schema van de rechthoekige driehoek weer op te bouwen. De kennis op het konkreet-mentale nivo wordt op die manier tot een grotere ordening gebracht.

Het had allemaal ook anders gekund. De leraar had na de eerste poging van de leerling kunnen reageren met: 'Dat is fout. Ik zal je wel eens laten zien hoe een rechthoekige driehoek er uit ziet'. Waarna hij zelf een tekening maakt. De eigen aktiviteit van de leerling wordt dan niet gestimuleerd en het is zeer de vraag of de leerling alle kenniselementen die bij het maken van de opgave een rol spelen, tot een hechtere eenheid brengt. Men loopt als leraar met een dergelijke aanpak het risico, dat het leereffekt beperkt blijft tot het materiële kennisnivo. De leerling weet dan de figuur achteraf wel te herkennen op het moment dat hij deze ziet, maar hij is niet in staat vanuit een mentale voorstelling tot produktie van de figuur van de rechthoekige driehoek te komen. Is dit risico bij de rechthoekige driehoek wellicht nog gering, zodra figuren wat gekompliceerder worden, zal dit risico groter worden. Veelvuldig voordoen door de leraar is niet bevorderlijk voor de opbouw van een kennisbestand dat evenwichtig verdeeld is over zoveel mogelijk relevante kennisnivo's. Het wiskundeonderwijs behoort te streven naar hechte netwerken van kennis op verschillende nivo's.

Een netwerk van kennis

Vele onderwerpen uit de schoolwiskunde laten zich gemakkelijk op alle of vrijwel alle kennisnivo's behandelen. We zullen daarvan een illustratie geven met behulp van een onderdeelje uit de goniometrie: de goniometrische verhoudingen van hoeken van 0° , 30° , 45° , 60° en 90° . We gaan er vanuit dat we daarbij het stadium van de losse rechthoekige driehoeken reeds verlaten hebben en ons bevinden in het stadium van de eenheidscirkel. Sommige leraren laten hun leerlingen de goniometrische verhoudingen van de standaardhoeken uit het hoofd leren:

$$\begin{aligned}\sin 0^\circ &= 0 \\ \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \\ \sin 45^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \sin 60^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \sin 90^\circ &= 1\end{aligned}$$

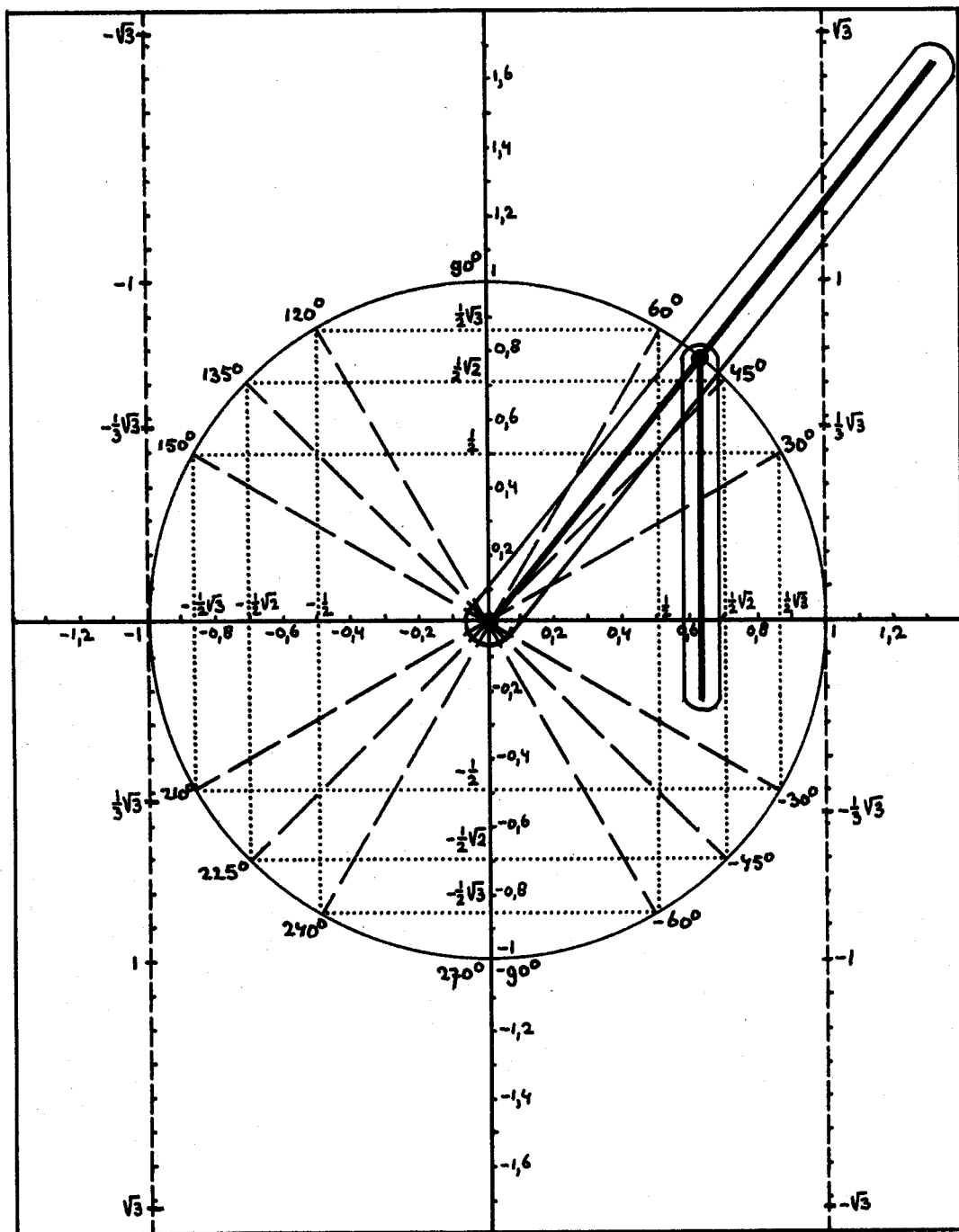
Soms voorzien zij dit van het foeffe: $\frac{1}{2}\sqrt{0}$, $\frac{1}{2}\sqrt{1}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{2}\sqrt{4}$. Dit betekent dat het bezig zijn met deze goniometrische verhoudingen geheel beperkt wordt tot een activiteit op het *konkreet-symbolische kennisnivo*. De betekenis van de symbolen blijft vaag of gaat geheel verloren zo die er al geweest is. Dit uit het hoofd leren en zeker het gebruik van het foeffe belemmert de leerling mogelijkserwijs om het onderwerp ook op de andere kennisnivo's te benaderen. Problemen ontstaan er zeker als ook de cosinus- en tangenswaarden om de hoek komen kijken. Het foeffe werkt dan niet meer en de kluwen van aantallen graden, nullen, halven, enen en wortels twee en drie wordt steeds onontwarbaarder voor de leerling.

Men kan een onderwerp als dit ook heel anders aanpakken. En dan niet alleen bij de invoering der begrippen, maar ook bij het werken daarmee in een later stadium van het onderwijs. Op het *materiële kennisnivo* zijn bijvoorbeeld verschillende aanpakken mogelijk. Een daarvan is dat de wiskundeleerlar in zijn lokaal een goniobord aan de wand heeft hangen, zoals afgebeeld in figuur 2. Door de beide draaiende elementen op de juiste wijze in te stellen en bij de ingestelde hoek de goniometrische waarde af te lezen verbindt men de goniometrische verhoudingen met motorische handelingen en visueel sterke indrukken. Het is duidelijk dat het werken

met een dergelijk bord bij de goniometrische verhoudingen van de standaardhoeken alleen mogelijk is als aan twee voorwaarden is voldaan. Ten eerste moeten sinus, cosinus en tangens voor willekeurige hoeken ook met behulp van een dergelijk goniobord zijn behandeld. Ten tweede moeten de specifieke waarden bij de standaardhoeken zijn afgeleid met behulp van de tekendriehoeken. Maar als aan die voorwaarden is voldaan, kan het goniobord door de onderlinge rangschikking der bijzondere getallen op de diverse getallenlijnen een krachtig hulpmiddel zijn om het geheugen van de leerlingen te stimuleren. Het enige probleem dat nader bestudeerd zou moeten worden, is in hoeverre de complexiteit van het bord de voorstelling van de leerling in de weg kan staan. Mijns inziens kan dat probleem worden opgelost door een goede selectie van de af te beelden lijnen en getallen en door het gebruik van verschillende lijndikten en lettergrootten.

Een andere mogelijkheid om de goniometrische verhoudingen van de standaardhoeken op materieel kennisnivo te ondersteunen is de leerlingen de eenheidscirkel met de bijbehorende hoeken en tekendriehoeken zelf te laten tekenen. Hierbij zouden zij gebruik kunnen maken van de goniomeetlat, zoals deze is afgebeeld in figuur 3. Men zou dergelijke meetlatten in verschillende lengten kunnen laten uitvoeren. Zolang ze niet op de markt zijn, kan men ze heel eenvoudig door de leerlingen zelf laten maken.

De handelingen die er ten aanzien van dit onderwerp op materieel nivo te verrichten zijn, zullen vergezeld gaan van woorden, uitdrukkingen, zinnen, enz. Het is goed tijdens het leerproces van de leerlingen ook aandacht te besteden aan het spreken in gewone omgangstaal over de dingen waarmee men bezig is. Mijn indruk is dat vele wiskundeleraren aan het *verbale kennisnivo* niet al te veel tijd besteden. Men stelt zich gemakkelijk tevreden met vragen als 'wat is de sinus?' en antwoorden als 'overstaande zijde gedeeld door schuine zijde'. Er is echter veel voor te zeggen de leerling te leren zich korrekt en volledig uit te drukken. Omschrijvingen als 'de sinus van een hoek is gelijk aan de lengte van de overstaande rechthoekszijde gedeeld door de lengte van de schuine zijde' kunnen de leerling helpen tot een scherper begrip van de zaak te komen. Het kunnen beschikken over een rijkere



Figuur 2 Het goniobord. Door het instellen van de bewegende delen kan bij elke hoek de sinus- en cosinuswaarde worden afgelezen. De tangenswaarde kan worden afgelezen voor hoeken tussen -60° en 60° en tussen 120° en 240° .

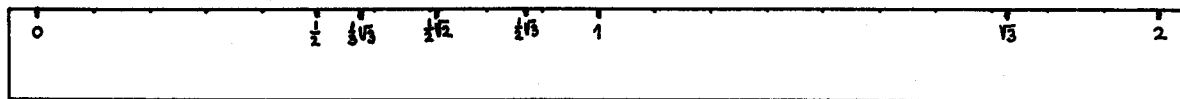
taal geeft meer mogelijkheden om de betekenis-komplexen op het materiële en mentale nivo te onderzoeken en te reproduceren.

De verwerving van materiële en verbale kennis zal er toe bijdragen dat de leerling ook op *konkreet-mentaal kennisnivo* zich de gewenste schema's en voorstellingen verwerft. Van de eenheidscirkel zal hij zich met de ogen dicht een voorstelling moeten kunnen maken. De hoeken en tekendriehoeken zal hij daar in moeten kunnen denken. Door het onthouden van drie lengten van rechthoekszijden bezit hij nu een voorstelling waaruit alle goniometrische verhoudingen van standaardhoeken snel zijn af te leiden. De konkreet-mentale voorstelling kan gematerialiseerd worden met behulp van een tekening, welke de afleiding der verhoudingen zal versnellen. Op *konkreet-symbolisch kennisnivo* zijn wat betreft de tangens enige vaardigheden in het rekenen nodig. Al het konkreet-symbolische materiaal van de sinus, cosinus en tangens van de standaardhoeken is langs deze weg gemakkelijk te reproduceren. Een sterke konkreet-mentale voorstelling, gebaseerd op materiële en verbale kennis van het onderwerp, maakt het uit het hoofd leren van rijtjes goniometrische verhoudingen tot een onnodige bezigheid. Als men de leerlingen consequent deze verhoudingen zelf laat berekenen langs bovengeschetste weg, dan zullen zij daarbij zelf op den duur allerlei verkortingen van het denkproces doorvoeren. Hierdoor neemt de snelheid der reproductie toe tot een nivo dat weinig hoeft te verschillen van dat bij uit het hoofd geleerde rijtjes.

De snelheid waarmee de goniometrische verhoudingen door de leerlingen worden gereproduceerd, is niet het enige criterium en zelfs niet het belangrijkste criterium voor het kiezen van het soort leren en de leerweg waarvan men gebruik wil maken. Een veel belangrijker criterium hierbij is bijvoor-

beeld de uitbreidbaarheid naar nieuwe leerstof. Wie de activiteiten van de leerling voornamelijk beperkt tot het konkreet-symbolische kennisnivo (uit het hoofd leren van en rekenen met goniometrische verhoudingen van standaardhoeken), staat een aantal later in te voeren uitbreidingen van de stof ernstig in de weg. Dit begint al als men de goniometrie wil uitbreiden tot het tweede, derde en vierde kwarant. Hier is alleen nog een sterke mentale voorstelling ondersteund door materiële kennis doelmatig. Is zo'n mentale voorstelling niet ontstaan tijdens het werken in het eerste kwadrant, dan zal uitbreiding naar de andere kwadranten de grootste problemen opleveren. Een andere uitbreiding van de leerstof die alleen kans van slagen heeft als er een sterke mentale voorstelling bestaat, is die naar de abstraktere kennisnivo's. Het werken met willekeurige hoeken in alle kwadranten vereist een *abstrakt-mentale* voorstelling van de eenheidscirkel voorzien van de projectielijnen van het snijpunt van cirkel en variabel been op de beide coördinaatassen. Ook de daarbij behorende *abstrakt-symbolische* uitdrukkingen zoals $\sin \alpha = y$ en $\cos \alpha = x$ kunnen door de leerling alleen van betekenis worden voorzien met behulp van een abstrakt-mentaal schema, desnoods in een of andere vorm gematerialiseerd door middel van een tekening.

De konklusie van dit alles is dat men er in het wiskundeonderwijs verstandig aan doet een onderwerp op zoveel mogelijk kennisnivo's aan de orde te stellen en er daarbij naar te streven de kenniselementen der verschillende nivo's zoveel mogelijk in elkaar te doen overvloeien. Op die manier ontstaat een stevig netwerk van kennis, waarmee de leerling optimaal in staat is inzichtelijk te opereren.



Figuur 3 De goniomeetlat voor het tekenen en nameten van driehoeken met standaardhoeken in een eenheidscirkel.

Slotopmerking

Ik ben ervan overtuigd dat het model van de zes kennisnivo's vele implicaties kan hebben voor het doordenken van het wiskundeonderwijs. Men kan er leerstof mee analyseren en beoordelen op eenzijdigheid of veelzijdigheid van de behandeling der onderwerpen. Men kan ermee onderzoeken of sommige leerlingen gemakkelijker op het ene kennisnivo en andere leerlingen gemakkelijker op het andere kennisnivo leren. Men kan er toetsen mee konstrueren die dezelfde leerstof op verschillende kennisnivo's navragen. Tenslotte kan men bij bepaalde onderwerpen uit de wiskunde die kennisnivo's trachten te exploreren die traditioneel bij de behandeling van die onderwerpen niet of nauwelijks aan de orde komen. Dit laatste is bijvoorbeeld veelvuldig het geval ten aanzien van het materiële kennisnivo. Het materiële kennisnivo beperkt zich in ons wiskundeonderwijs voornamelijk tot de vlakke meetkunde. De wijze waarop de ruimtemeetkunde gematerialiseerd wordt, is bijvoorbeeld al niet doelmatig zonder een sterke mentale voorstelling van de behandelde ruimtelijke figuren. Vele leerlingen worden geplaagd met tweedimensionaal weergegeven driedimensionale figuren zonder een materiële, d.w.z. driedimensionale, kennis van deze figuren te bezitten. Ook de nieuwere ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs, welke ik overigens van harte toejuich, hebben het materiële kennisnivo niet of nauwelijks een plaats gegund. Mijns inziens ligt hier dan ook een terrein braak voor het onderzoek van het wiskundeonderwijs.

Literatuur

- Hiele, P. M. van, *Begrip en inzicht*, Muusses, Purmerend, 1973.
Riet, S. P. van 't, *Zes kennisnivo's in het wiskundeonderwijs*, Euclides 58, no. 7, 1983, p. 241-247.