

Setvorming en wiskundeonderwijs

IV *Het vermenigvuldigen van wortelgetallen; eenvoudige algoritmen*

S. P. VAN 'T RIET EN L. DE LEEUW

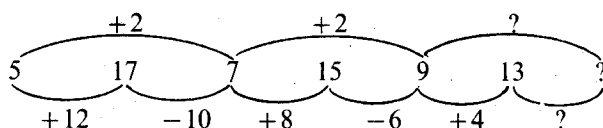
1 Inleiding

In de eerste twee artikelen in deze serie (Van 't Riet, 1979 en 1980) is het verschijnsel van de setvorming bij het oplossen van aritmetische problemen uitgebreid aan de orde geweest. Van dit verschijnsel werden met name twee aspecten behandeld, te weten *Einstellung* en *rigiditeit*. In het derde artikel (Van 't Riet en De Leeuw, 1980) werd een experiment beschreven waarin setvorming onderzocht is bij het oplossen van vraagstukken met behulp van algoritmen. In dit vierde artikel zal een resterend gedeelte van dit onderzoek worden behandeld en worden enkele lijnen getrokken naar het wiskundeonderwijs in havo en vwo. Bovendien is in een appendix een overzicht opgenomen van de belasting die het onderzoek heeft meegebracht voor de school waar het is uitgevoerd.

2 Korte samenvatting van de opzet van het onderzoek

In het vorige artikel is een onderzoek naar setvorming beschreven. Het ging daarin om het voortzetten van getallenrijen met behulp van algoritmen. Twee algoritmen speelden een rol: een setalgoritme en een eenvoudiger extinktialgoritme.

Extinktialgoritme:



Setalgoritme:

Eerst werden deze algoritmen geleerd met een BLOK-leerstofaanbieding of een MIXED-leerstofaanbieding. Bij de BLOK-leerstofaanbieding werd eerst het setalgoritme volledig geleerd en vervolgens het extinktialgoritme. Bij de MIXED-leerstofaanbieding werden set- en extinktialgoritme om en om geleerd. Verondersteld werd dat met deze laatste vorm van leerstofaanbieding niet alleen de algoritmen geleerd zouden worden, maar ook switch-gedrag tussen de algoritmen. Twee dagen later werd een E-test afgenomen die bestond uit 10 setproblemen (alleen oplosbaar met het setalgoritme), 4 kritische problemen (oplosbaar zowel met het set- als met het extinktialgoritme) en 4 extinktieproblemen (alleen oplosbaar met het extinktialgoritme). Het gebruik van het set-

algoritme op de kritische problemen bepaalde een z.g. kritische score, welke een maat voor de Einstellung vormde. Het falen op de extinktieproblemen, naar we aannemen door gebruik van het setalgoritme, bepaalde een z.g. extinktietescore, welke een maat was voor de rigiditeit. Twee vraagstellingen zijn op deze wijze onderzocht: (1) Treedt er setvorming op bij het voortzetten van getallenrijen met behulp van algoritmen? (2) Geeft de MIXED-leerstofaanbieding significant minder setvorming te zien op de E-test dan de BLOK-leerstofaanbieding? De resultaten van het onderzoek wezen uit dat de eerste vraagstelling wel bevestigend beantwoord kan worden, de tweede echter niet.

3 De derde vraagstelling: De invloed van complexiteit

Een belangrijke faktor die het leerresultaat of het oplossingsgedrag bij vele taken beïnvloedt, is de complexiteit van de opgaven. Johnson (1972, p. 140) definieert complexiteit van taken in termen van de hoeveelheid aangeboden materiaal, het aantal specificaties voor de juiste oplossing, het minimale aantal stappen naar de oplossing, de hoeveelheid te verwerken informatie, enz. De invloed van complexiteit is vooral onderzocht bij open-search problemen, die niet met behulp van een algoritme zijn op te lossen (zie het vorige artikel, paragraaf 3). Duidelijk is bijvoorbeeld dat als de hoeveelheid materiaal (het aantal gegevens) en het minimale aantal stappen voor de goede oplossing toenemen, ook het gemiddelde aantal door de leerlingen genomen stappen en de benodigde oplossingstijd toenemen. Bij algoritmische taken zal het zo zijn dat een complexer algoritme uit meer stappen bestaat, waarbij meer materiaal verwerkt moet worden, dan een minder complex algoritme. Daardoor zal het moeilijker te leren zijn, d.w.z. het leren van een complex algoritme vergt meer inspanning en tijd. Gezien het onderzoek van Knight (1963) waaruit bleek dat grotere inspanning bij het verwerven van de set een groter seteffekt bewerkstelligde (zie Van 't Riet, 1980), kan dit van belang zijn. Weliswaar bestond de door Knight gebruikte E-test uit open-search problemen (de kennenproblemen van Luchins), toch ligt het voor de hand te veronderstellen dat ook bij algoritmische taken grotere inspanning d.m.v. grotere complexiteit een grotere setvorming geeft. Ook in ander onderzoek blijkt complexiteit een rol te spelen. De Leeuw (1979, p. 157) vond bijvoorbeeld bij proefpersonen die problemen op drie niveaus van complexiteit hadden leren oplossen grotere seteffecten dan bij proefpersonen die dit alleen geleerd hadden op de laagste twee van die drie niveaus.

Op het terrein van complexiteit ligt nu de derde vraagstelling van het onderzoek: Gaat verschil in complexiteit van de problemen gepaard met verschil in seteffekt? Men kan hierbij aan twee dingen denken: (a) Verschil in complexiteit geeft verschil in de grootte van het seteffekt. Op grond van het voorgaande moet men dan bij gekompliceerder algoritmen grotere setvorming verwachten. (b) Verschil in complexiteit heeft op de Einstellung een andere invloed dan op de rigiditeit. Hierover valt op grond van de gegevens uit de literatuur geen verwachting uit te spreken.

Het was nu nodig naast de getallenrijen een tweede type problemen te vinden die algoritmisch zijn op te lossen en van een andere mate van complexiteit zijn. Bij het zoeken naar een dergelijke type problemen speelden de volgende overwegingen een rol. De complexiteit van de getallenrijproblemen werd al tamelijk groot bevonden. De proefpersonen zouden tenslotte brugklasleerlingen zijn, omdat deze de grootste en meest homogene proefgroep vormden, en de beschikbare tijd voor het experiment was beperkt. Daarom werd besloten een type problemen van geringere complexiteit te zoeken. Verder werd de eis gesteld problemen te vinden die relevant zouden zijn voor het wiskundeonderwijs. Er moest dus een onderwerp gezocht worden dat in de brugklas zelf niet behandeld werd, daar anders allerlei onkontroleerbare leereffekten een rol zouden gaan spelen, maar in het verdere onderwijs wel van belang zou zijn. Dit werd gevonden in het vermenigvuldigen van wortelgetallen, een onderwerp dat tot de stof van het tweede leerjaar behoort.

Het algoritme van de setproblemen laat zich illustreren door berekeningen als $\sqrt{4 \times 1156} = \sqrt{4624} = 68$. De extinktieproblemen zijn op te lossen met een ander algoritme: $\sqrt{4 \times 1156} = 2 \times 34 = 68$. Deze laatste methode leidt, vooral als de getallen groter worden, tot een aanzienlijke vereenvoudiging van het rekenwerk. Voorts is het duidelijk dat deze wortelvermenigvuldigingen veel minder gekompliceerd zijn dan de getallenrijopgaven. Het gaat louter om een samenstelling van twee bewerkingen. Wie de algoritmen zou willen uitschrijven als een serie te verrichten handelingen om tot de goede oplossing te komen, zal snel konkluderen dat dat bij getallenrijopgaven behoorlijk lastig is, bij de wortelvermenigvuldigingen zeer simpel. De handelingsschema's van het set- en het extinktiealgoritme bij de wortelproblemen zien er als volgt uit:

Setalgoritme

1. Vermenigvuldig 4 en 1156.
2. Trek de wortel uit 4624.

(Extinktiealgoritme

1. Trek de wortel uit 4 en 1156.
2. Vermenigvuldig 2 en 34.

Het voornaamste punt van verschil is de volgorde waarin de bewerkingen moeten worden toegepast: Bij het setalgoritme eerst vermenigvuldigen, daarna worteltrekken; bij het extinktiealgoritme eerst worteltrekken, daarna vermenigvuldigen. Bij de leerstofaanbieding is van dit onderscheid expliciet gebruik gemaakt.

Er doet zich nu nog één probleem voor. De setproblemen moeten zo gepresenteerd worden dat de proefpersonen geen gebruik kunnen maken van het extinktialgoritme en de extinktieproblemen zo dat zij geen gebruik kunnen maken van het setalgoritme. Dit probleem is opgelost door de proefpersonen te laten werken met onkomplete worteltabellen. Hiermee kan men voorkomen dat de proefpersoon de voor een bepaald algoritme benodigde worteluitkomsten kan vinden. In Tabel 1 ziet men hoe deze procedure werkt. Bij de setproblemen wordt de proefpersoon 'gedwongen' met het setalgoritme te werken, bij de extinktieproblemen met het extinktialgoritme. Op deze wijze voldoen de problemen aan alle criteria van het onderzoek.

Tabel 1 Drie soorten problemen van vermenigvuldigingen van wortelgetallen voor een E-test. $\sqrt{1849}$ en $\sqrt{1296}$ zijn niet opgenomen in een begeleidende tabel, de andere wortels wel.

Setproblemen	$\sqrt{4} \times \sqrt{1849} = \sqrt{7396} = 86$ $= 2 \times ? = ?$
Kritische problemen	$\sqrt{9} \times \sqrt{225} = \sqrt{2025} = 45$ $= 3 \times 15 = 45$
Extinctieproblemen	$\sqrt{4} \times \sqrt{324} = \sqrt{1296} = ?$ $= 2 \times 18 = 36$

4 Resterende opzet van het onderzoek

We vermelden in het kort nog even een aantal details van het wortelgedeelte van het onderzoek. Voor de fase van de leerstofaanbieding zijn evenals bij de getallenrijen twee typen boekjes ontworpen, een met een BLOK-leerstofaanbieding en een met een MIXED-leerstofaanbieding. Daar voorafgaand aan het leren van set- en extinctiealgoritme het wortelbegrip en het gebruik van een eenvoudige worteltabel geleerd moesten worden, begonnen alle boekjes met drie inleidende pagina's die series korte aanwijzingen en opdrachten bevatten. In de BLOK-boekjes werden vervolgens zes instructieopdrachten aangaande het setalgoritme gegeven en daarna zes aangaande het extinctiealgoritme. In het MIXED-boekje waren deze twaalf opdrachten qua algoritme om en om door elkaar gezet. De getallen die in de problemen gebruikt werden, waren zo gekozen dat naar verwachting het rekenwerk bij de wortelproblemen ongeveer dezelfde omvang had als bij de getallenrijen. Ook deze boekjes konden door de leerlingen geheel zelfstandig worden doorgenomen. Met enige hulp van de proefleider aan enkele leerlingen verliep dit zonder problemen.

Vervolgens werd met wortelvermenigvuldigingen een E-test gemaakt in opbouw en uitvoering gelijk aan die van de getallenrijen. Bij deze E-test konden de proefpersonen gebruik maken van een beperkte worteltabel, die qua keuze van de getallen op de test was afgesteld (zie in dit verband Tabel 1). De E-test werd twee dagen na de leerstofaanbieding afgenomen. Op grond van deze afname werden een kritische score en een extinctiescore verkregen, maten voor Einstellung respectievelijk rigiditeit.

Om nu te kunnen constateren of er werkelijk sprake van setvorming is moesten er, zoals in het vorige artikel is uiteengezet, ook hier controleproblemen worden ontworpen, die de proefpersonen in de controlegroepen te maken kregen in plaats van de setproblemen. Deze problemen zouden wat rekenwerk betreft min of meer gelijk moeten zijn aan de setproblemen van de wortelvermenigvuldiging, maar er op het punt van de algoritmen geen verwantschap mee mogen vertonen. Deze werden gevonden.

(In enigszins gewijzigde lay-out zagen deze controleproblemen er als volgt uit: Vul op de streepjes de ontbrekende cijfers in zo dat er een kloppende vermenigvuldiging komt te staan: $4 \times 5 = 5452$. De eerste vier van deze controleproblemen bevatten enige instructie waarmee de opdracht werd duidelijk gemaakt. Daarna volgden zes opgaven zonder aanwijzingen. Deze tien opgaven moesten

alle evenals de setproblemen van de E-test in één minuut gemaakt worden, daar zij gelijktijdig met de setproblemen werden afgenomen.)

De proefpersonen van de controlegroepen bleken de gebruikte controleproblemen erg moeilijk te vinden en het aantal goed gemaakte van deze opgaven was na afloop dan ook erg laag. Toch hebben ze hun functie van controleproblemen goed vervuld. De proefpersonen van de betreffende controlegroepen bleken tijdens de er op volgende kritische problemen en extinktieproblemen van de wortelvermenigvuldigingen niet ontregeld te reageren. Er werden kritische scores en extinktiescores verkregen die vergeleken konden worden met de scores van de E-testgroepen.

De totale opzet van het onderzoek (getallenrijen en wortelvermenigvuldigingen) omvatte nu acht kondities op drie vraagstellingen. In Tabel 2 is deze opzet schematisch samengevat. De toewijzing van leerlingen aan de acht kondities is in het vorige artikel besproken.

Tabel 2 De drie vraagstellingen van het onderzoek en de acht bijbehorende kondities (groepen proefpersonen). Ook vermeld is het aantal proefpersonen dat per konditie bij het onderzoek betrokken was en de voor elke konditie gebruikte kodering.

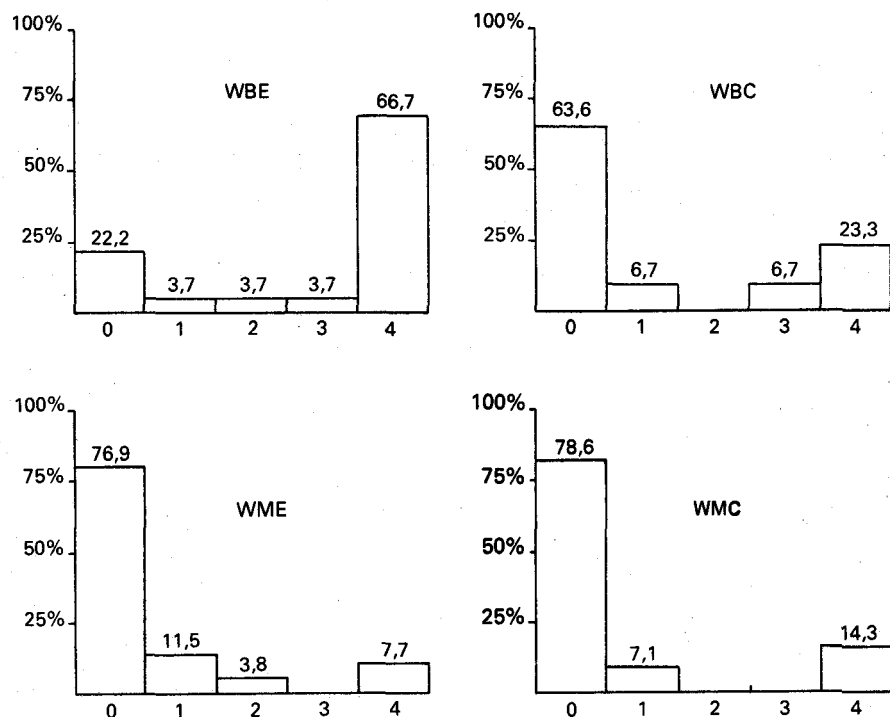
Vraagstelling 3: Komplexiteit	Getallenrijen				Wortels			
Vraagstelling 2: Leerstofaanbieding	BLOK		MIXED		BLOK		MIXED	
Vraagstelling 1: Setvorming	E-test	C-taken	E-test	C-taken	E-test	C-taken	E-test	C-taken
Kodering van de acht kondities	GBE	GBC	GME	GMC	WBE	WBC	WME	WMC
Aantal proefpersonen per groep	26	27	27	26	27	30	26	28

5 Resultaten en discussie

5.1 *Einstellung bij wortelvermenigvuldigingen*

In Fig. 1 zijn de histogrammen afgebeeld van de kritische scores van de wortelgroepen WBE, WBC, WME en WMC. Hierbij zien we een opmerkelijk resultaat. In de E-testgroep WBE is een aanzienlijk seteffekt te constateren ten opzichte van de controlegroep WBC. Dit verschil is significant met 'Wilcoxon' (zie voor de toetsing het vorige artikel, paragraaf 8.1). Echter is er in de E-testgroep WME in het geheel geen sprake van een seteffekt, zoals vergelijking met de controlegroep WMC duidelijk maakt. Ook het verschil tussen de E-testgroep met de BLOK-leerstofaanbieding en die met de MIXED-leerstofaanbieding is significant en in de verwachte richting. In tegenstelling tot de resultaten bij de getallenrijen vinden we hier dus een zeer grote invloed van de aard der leerstofaanbieding op de setvorming. Vraagstelling 1 en 2 vinden bij de wortelproblemen daarom een gezamenlijke beantwoording als het om

Einstellung gaat: Bij algoritmische problemen zoals wortelvermenigvuldigingen treedt Einstellung op na een BLOK-, maar niet na een MIXED-leerstofaanbieding. Kennelijk hebben de proefpersonen door de MIXED-leerstofaanbieding geleerd van het setalgoritme te switchen naar het extinktiaalgoritme zodra dit efficiënter is. Dit is een opmerkelijk resultaat, waaruit blijkt dat *voorkoming van setgedrag in bepaalde gevallen leerbaar* is. Een interessant gegeven voor het onderwijs.

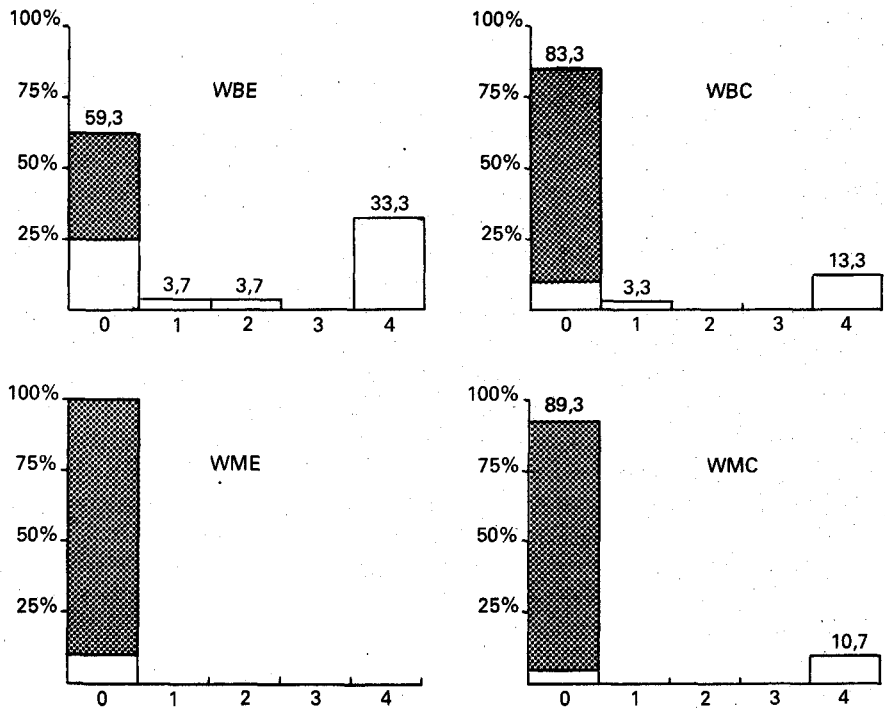


Figuur 1 Histogrammen van de kritische score (*Einstellung*) in percentages proefpersonen voor de vier wortelproblemgroepen.

5.2 Rigiditeit bij wortelvermenigvuldigingen

Na de resultaten uit de vorige paragraaf is het eigenlijk alleen nog interessant na te gaan of er rigiditeit optreedt in de E-testgroep WBE. Voor de volledigheid echter geven we in Fig. 2 de histogrammen van de extinktiescores van de vier wortelgroepen. Weer gearceerd is het percentage proefpersonen dat tijdens de kritische problemen al tot doorbreking van de set was gekomen. Toetsing met 'Wilcoxon' levert op dat het verschil van WBE ten opzichte van WBC in de verwachte richting pas significant is bij $\alpha = .06$. Het verschil tussen WBE en WME is in de verwachte richting significant bij $\alpha = .05$. Hoewel het eerste resultaat niet het .05-nivo haalt, geven beide resultaten samen wel aanleiding in

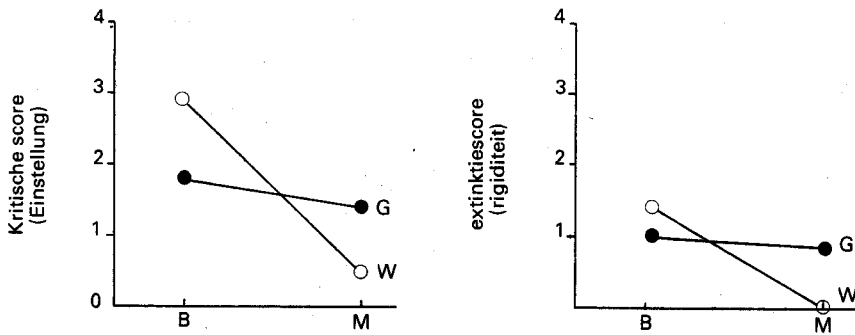
de WBE-groep van een rigiditeitseffekt te spreken. Evenals bij Einstellung zien we ook hier de reducerende invloed van de MIXED-leerstofaanbieding op het seteffekt. Opvallend is vooral het 100% gebruik van het extinktialgoritme in de E-testgroep WME.



Figuur 2 Histogrammen van de extinktietest (rigiditeit) in percentages proefpersonen voor de vier wortelproblemgroepen. Het gearceerde gedeelte geeft het percentage proefpersonen aan, dat op de kritische problemen reeds de set doorbroken had.

5.3 Het seteffekt en de complexiteit van de problemen

Hoewel we in de voorgaande paragrafen al het een en ander aan verschillen tussen de resultaten bij getallenrijen en bij wortelproblemen gezien hebben, moeten we nog even nader stil staan bij het verschil in complexiteit tussen beide soorten problemen. In paragraaf 3 werd bij het bespreken van de invloed van complexiteit het vermoeden uitgesproken dat bij de complexere problemen, de getallenrijen, een groter seteffekt gevonden zou worden, dan bij de eenvoudigere problemen, de wortelvermenigvuldigingen. Dit blijkt in zijn algemeenheid niet juist te zijn. In Fig. 3 hebben we voor de vier E-testgroepen GBE, GME, WBE en WME de gemiddelde kritische score en extinktietest in een grafiek uitgezet. Bij de MIXED-leerstofaanbieding is het verschil in Einstellung en rigiditeit tussen de G- en de W-groepen in de verwachte richting. Deze verschillen zijn significant met Wilcoxon eenzijdig getoetst, voor Einstellung bij $\alpha = .0505$ en



Figuur 3 Gemiddelde kritische score (Einstellung) en extinctiescore (rigiditeit) voor de vier E-testgroepen: B = BLOK, M = MIXED, G = getallenrijen en W = wortelproblemen.

voor rigiditeit bij $\alpha = .0516$. Bij de BLOK-leerstofaanbieding is het verschil echter in de tegengestelde richting: De minder complexe algoritmen van de wortelvermenigvuldigingen geven aanleiding tot een grotere setvorming dan de complexere algoritmen van de getallenrijen.

Op de verklaring voor dit laatste resultaat zullen we in het kader van dit artikel niet al te diep ingaan. Wel wijzen we op het volgende. De verwachting van meer setvorming bij grotere complexiteit van de algoritmen is uitgesproken naar aanleiding van het onderzoek van Knight (1963) en De Leeuw (1979). Bij nadere beschouwing blijkt evenwel dat het in beide onderzoeken gaat om complexiteitsverschillen binnen een zelfde categorie van problemen: bij Knight kennenproblemen van Luchins en bij De Leeuw het voortzetten van getallenrijen. In het onderzoek waarvan nu verslag gedaan wordt, gaat het echter om complexiteitsverschillen tussen problemen van geheel verschillende aard: getallenrijen-voortzetten tegenover wortelvermenigvuldigingen. De mogelijkheid bestaat dat de gevonden resultaten niet zo zeer verklaard moeten worden in termen van complexiteit dan wel in termen van andere taakvariabelen. Het is bijvoorbeeld goed denkbaar dat bij eenvoudige problemen als die van de wortels al na zeer weinig setproblemen een seteffect optreedt, terwijl voor een zelfde seteffect bij de ingewikkelder problemen van de getallenrijen een groter aantal setproblemen nodig is. Vanuit een zelfde gezichtspunt laat het zich verklaren dat bij eenvoudige algoritmen zoals die van de wortels het switch-gedrag gemakkelijker leerbaar is.

Hoe dit ook zij, het onderzoek heeft aangetoond dat bij eenvoudige rekenkundige taken seteffecten zijn te ondervangen door middel van een bepaalde vorm van leerstofaanbieding. Een interessante vraag blijft nu liggen voor verder onderzoek: Door middel van welke variabelen van de leerstofaanbieding kan men ook bij ingewikkelder algoritmen seteffecten voorkomen?

6 Konsekwenties voor het wiskundeonderwijs

Na de bovenstaande bespreking van de resultaten van ons onderzoek komen

een aantal in de voorgaande afleveringen opgeworpen problemen tot een duidelijker beantwoording.

Ten eerste kan het verband tussen Einstellung en rigiditeit enerzijds en persoonskenmerken inclusief intelligentie van de leerlingen anderzijds bepaald niet eenduidig zijn. Dit blijkt wel het duidelijkst uit de zojuist gerapporteerde resultaten van setvorming bij de wortelvermenigvuldigingen. In de groep WBE werd wel Einstellung gekonstateerd, in de groep WME niet. De random toewijzing van proefpersonen aan kondities, zoals in het vorige artikel besproken, draagt er zorg voor dat beide groepen proefpersonen op het punt van persoonskenmerken een min of meer gelijke samenstelling hebben. Leerlingen met dezelfde persoonskenmerken vertonen in de ene konditie wel Einstellung, in de andere niet. Dit betekent dat de relatie tussen de persoonlijkheid van de leerlingen en hun setmatige reacties gekompliceerd is. Men kan het zo formuleren: Of leerlingen met bepaalde persoonskenmerken Einstellung en rigiditeit vertonen of niet hangt in sterke mate af van de aard der omstandigheden waarin deze leerlingen moeten functioneren. M.a.w. de wijze waarop we het onderwijs inrichten kan voor het ene type leerling meer nadelig zijn dan voor het andere type leerling. In het kader van deze serie artikelen zullen we op deze problematiek niet verder ingaan. Er zij echter een waarschuwing uit af te leiden: Setverschijnselen moet men niet gebruiken om leerlingen te beoordelen, maar om de inrichting van het onderwijs te beoordelen. In andere publikaties hopen we dit punt van de persoonskenmerken in relatie tot setvorming in de toekomst nader uit te werken.

In de tweede plaats komen we terug op het probleem hoe het onderwijs zo in te richten dat Einstellung en rigiditeit worden geminimaliseerd. Uit ons onderzoek blijkt dat dit niet een eenvoudige vraag is. Bij eenvoudige algoritmen als wortelvermenigvuldigingen hebben we nu een duidelijke indicatie: Mixing van de te leren algoritmen in de leerfase heeft een gunstig effect op de keuze van het meest effectieve algoritme. Bij gekompliceerde algoritmen is dit effect echter te gering om er veel waarde aan te hechten. Wellicht is het geheel voorkomen van Einstellung en rigiditeit door middel van een bepaalde leerstofaanbieding een te mooie wens. Desondanks zal het duidelijk zijn dat, waar het gaat om het maken van een keuze uit algoritmen, er in het leerproces een fase moet worden opgenomen waarin dit leren kiezen de belangrijkste doelstelling is. Zo is het mogelijk het meest doelmatig de meer gekompliceerde algoritmen eerst BLOK-vormig te leren en te oefenen en vervolgens een MIXED-serie instructies en opgaven te geven waarbij het vooral gaat om de vraag naar de meest efficiënte oplossing. Of een dergelijke leerstofaanbieding steeds Einstellung en rigiditeit zal voorkomen is evenwel de vraag. Misschien moeten we naar heel andere kenmerken van de leerstofaanbieding zoeken om setmatig gedrag van leerlingen tegen te gaan. Te denken valt dan aan meer open, zelfontdekkende manieren van leren van algoritmen. Deze in tegenstelling tot de meer gesloten, geleide manier van leren zoals meestal in het onderwijs toegepast (en ook in ons onderzoek). Men spreekt in de leerpsychologie in dit verband van heuristische resp. algoritmische instructiemethoden. Duidelijk is dat hier nog een heel terrein open ligt voor verder onderzoek.

Aardig is in dit verband het volgende voorbeeld van leerstof in Moderne

Wiskunde deel 4hv (p. 155). Nadat bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen de drie algoritmen ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en abc-formule afzonderlijk zijn behandeld en geoefend, volgt er een opdracht: 'Ga bij het oplossen van de volgende vergelijkingen eerst goed na welke oplossingsmethode je het beste kunt toepassen: ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen of abc-formule.' Er volgen twaalf vergelijkingen. Er wordt echter niet ingegaan op kenmerken van de vergelijkingen waaruit valt op te maken welk algoritme hier 'het beste' toegepast kan worden. De moeilijkheid is namelijk dat twee van de drie methoden in alle gevallen tot goed resultaat leiden en de leerlingen dus niet door de opgaven zelf gedwongen worden het meest effectieve algoritme te kiezen. Bovendien staat in de antwoordenlijst die achter in het boek voor de leerlingen is opgenomen wel de oplossingsverzameling van elke vergelijking vermeld, maar niet de meest effectieve methode. De leerlingen krijgen dus geen feed-back ten aanzien van het belangrijkste leerdoel van deze opdracht. Het lijkt alsof de schrijvers veronderstellen dat het kiezen van de meest efficiënte oplossingsmethode iets is dat de leerlingen vanzelf wel zullen doen. Ons onderzoek toont aan dat dit in het algemeen niet het geval is. Het kiezen van de meest effectieve methode is iets dat geleerd moet worden, althans als dit een doelstelling van ons onderwijs is. En daarvoor zouden wij wel willen pleiten..

7 Tenslotte

Met dit artikel is het onderzoeksgedeelte van deze serie afgesloten. De serie zal besloten worden met een vijfde artikel waarin zal worden aangetoond dat Einstellung en rigiditeit zich over de hele linie in de wiskunde van het havo en vwo kunnen voordoen. Tot slot is aan dit artikel een appendix toegevoegd waarin de belasting van het onderzoek voor de school beschreven wordt.

8 De belasting van het onderzoek voor de school (appendix)

De school is om tal van redenen een ideale plaats om een onderzoek als het onderhavige uit te voeren. Er zijn grote aantallen proefpersonen beschikbaar. De situatie waarin het onderzoek wordt afgenomen is nauw verwant aan de reële onderwijsleersituatie. De proefgroep maakt generalisatie van de onderzoeksresultaten mogelijk naar veel grotere groepen leerlingen, namelijk van scholen van hetzelfde type. Door de school worden vaak voor andere doeleinden zoals begeleiding van leerlingen allerlei psychometrische gegevens verzameld, waarvan in het onderzoek gebruik gemaakt kan worden. Bovendien bestaat de mogelijkheid om gebruik te maken van studieresultaten van leerlingen. Anderzijds kunnen in het kader van het onderzoek gegevens worden verzameld, waarvan de school gebruik kan maken. Te denken valt aan scores op persoonlijkheidstests of cijfers van gemeenschappelijke proefwerken.

Behalve voordelen voor de school geeft een onderzoek natuurlijk ook enige belasting. Het spreekt vanzelf dat zowel de schoolleiding als de onderzoekers er naar zullen streven deze belasting zo gering mogelijk te maken. Hiertoe zijn tal

van mogelijkheden. We zullen in het kort een indruk proberen te geven van de wijze waarop dit in ons onderzoek is gerealiseerd.

In een eerste vooronderzoekje zijn de getallenrijproblemen uitgetoetst op een achttal leerlingen van 2 HAVO-klassen. Deze deden hieraan mee op basis van vrijwilligheid en na schooltijd. Vervolgens is een vooronderzoek van wat grotere omvang opgezet, waarbij een 2 VWO-klas werd ingeschakeld. Dit om te voorkomen dat het grote onderzoek op acht brugklassen door allerlei onvoorziene omstandigheden zou mislukken. Dit vooronderzoek vond plaats tijdens een natuurkundeles en twee dagen later een halve aardrijkskundeles. Hierin werd een perceptietest afgenomen (wegens andere vraagstellingen van het onderzoek) en namen de leerlingen het BLOK-getallenrijboekje door. Tijdens de aardrijkskundeles werd de E-test van de getallenrijen afgenomen.

Het definitieve onderzoek vond plaats in de periode rondom de paasvakantie. Het is in alle acht brugklassen door de konrektrix van de brugklas aangekondigd. In de twee weken voor de paasvakantie is in alle klassen een prestatie-motivatietest afgenomen (eveneens wegens hier niet besproken vraagstellingen van het onderzoek). Dit nam per klas ongeveer een uur in beslag en gebeurde op uren waarop deze klassen vrij gehad zouden hebben wegens ziekte van hun docenten. In de twee weken na de paasvakantie volgde het verdere onderzoek. Daar dit de periode van het mondeling schoolonderzoek was, vielen er voor de brugklassen vele lessen uit. Er is nu uitsluitend van deze uitgevallen uren gebruik gemaakt. Alle klassen kregen eerst gedurende een uur de perceptietest te maken (± 20 minuten) en vervolgens de boekjes van de leerstofaanbieding door te werken (± 25 minuten). Twee dagen daarna volgde dan de afname van de E-test en de controletaken (± 25 minuten). De organisatie hiervan heeft alleen de maakster van het aan het schoolonderzoek aangepaste lesrooster enig hoofdbreken gekost. Verder zij vermeld dat de scores van de prestatie-motivatietest in overleg met de schoolpsycholoog voor begeleidingsdoelen aan de mentoren ter beschikking zijn gesteld.

Al met al kunnen we nu stellen dat de belasting van het onderzoek voor de school zeer gering is geweest, doordat het in het schoolgebeuren is ingepast in de daartoe meest geschikte periode van het schooljaar. Bij deze spreken we dan ook de hoop uit dat er in de toekomst op grotere schaal gebruik gemaakt zal kunnen worden van de mogelijkheden die er liggen in samenwerking tussen scholen en onderzoekers op het gebied van de leerpsychologie. Dit kan bevruuchtend werken op het onderzoek. De vraagstellingen kunnen meer geënt worden op de praktijk van het onderwijs. En het kan verdiepend werken voor het onderwijs: De confrontatie van docenten met de resultaten van het onderzoek opent soms nieuwe gezichtspunten, vanwaaruit verbetering van het onderwijs kan worden nagestreefd. Wisselwerking tussen wetenschap en praktijk kan beide alleen maar ten goede komen.

Literatuur (zie ook: Van 't Riet, 1980)

Johnson, D. M., *Systematic introduction to the psychology of thinking*, Harper en Row, New York, 1972.

Leeuw, L. de, *Leren probleemoplossen*, Swets en Zeitlinger, Lisse, 1979.

Moderne Wiskunde voor V.O., deel 4hv, 3e druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, z.j.

Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, I Einstellung en rigiditeit bij het oplossen van wiskundige vraagstukken*, Euclides 1979, 55, p. 41–49.

Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, II De aard van de leerervaring*, Euclides 1980, 55, p. 308–316.

Riet, S. P. van 't, Leeuw, L. de, *Setvorming en wiskundeonderwijs, III Het voortzetten van getallen: – rijen met behulp van algoritmen; een onderzoek*, Euclides 1980, 55, p. 22–36.