Setvorming en wiskundeonderwijs

III Het voortzetten van getallenrijen met behulp van algoritmen; een onderzoek

S. P. VAN 'T RIET EN L. DE LEEUW[1])

1 Inleiding

In dit derde artikel over het onderwerp setvorming bespreken we een onderzoek dat we in het voorjaar van 1978 verricht hebben naar setvorming bij het oplossen van wiskundige vraagstukken met behulp van algoritmen. Van het totale onderzoek zullen we in deze artikelenserie slechts een gedeelte rapporteren. Het onderzoek is uitgevoerd met twee soorten vraagstukken, te weten het voortzetten van getallenrijen en het vermenigvuldigen van wortelgetallen. In deze aflevering zullen we de opzet van het onderzoek schetsen en de resultaten van het getallenrijengedeelte bespreken. In de volgende afleveringen bespreken we het wortelgetallengedeelte en trekken we enkele lijnen naar de behandeling van leerstof in de meest gebruikte wiskundemethoden in het voortgezet onderwijs.

Het onderzoek is uitgevoerd met de brugklasleerlingen van het Comenius College te Hilversum[2]) en geeft tevens een indruk hoe men met tamelijk eenvoudige middelen in de school onderzoek kan doen. Naast paragrafen over het begrip 'algoritme', de vraagstelling, de opzet en de resultaten van het onderzoek is daarom in de volgende aflevering ook een paragraaf opgenomen die gewijd is aan de inpassing van het onderzoek in het schoolgebeuren. Zo kan een indruk ontstaan hoe groot de belasting is die een dergelijk onderzoek voor de school met zich meebrengt.

2 Algoritmen

Alvorens de vraagstelling van het onderzoek te bespreken willen we even stil staan bij het begrip 'algoritme', dat een centrale rol speelt in het onderzoek. We zullen daarbij gebruik maken van een belangrijk onderscheid in doelen van het wiskundeonderwijs, zoals dat aangebracht is door Avital en Shettleworth (1968). In hun poging de taxonomie voor onderwijsdoelen van Bloom e.a. (1956) meer geschikt te maken voor het wiskundeonderwijs komen zij tot drie kategorieën van onderwijsdoelen: (1) Kennis; (2) Algoritmisch denken; (3) Open search. Onder kennis (knowledge) verstaan zij zowel herinnering (recall) als herkenning (recognition) van eerder geleerd materiaal. Voor ons doel zijn echter vooral de kategorieën 2 en 3 van belang. We moeten daarbij bedenken dat de nagestreefde onderwijsdoelen worden geformuleerd in termen van leerlingengedrag. Zodoende geeft een taxonomie niet alleen een indeling van doelen (gesteld door de leraar), maar ook van leerbezigheden (uitgevoerd door de leerling). Een taxonomie kan dus tevens gezien worden als een klassifikatiesysteem voor leertaken. We zullen nu de kategorieën 2 en 3 toelichten met enkele voorbeelden.

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs leren de leerlingen het berekenen van de koördinaten van het snijpunt van twee niet evenwijdige lijnen in het vlak. Hiervoor bestaan verschillende procedures of algoritmen. Een ervan is de substitutiemethode. Men begint meestal eenvoudig.

Opgave 1:

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2 \\ 3x + 2 = -x + 6 \end{cases} \text{enz.}$$

Gaandeweg maakt men de opgaven moeilijker, totdat er tenslotte een kompleet algoritme ontstaat.

Opgave 2: met $a_1 \neq 0$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{b_1}{a_1}y - \dfrac{c_1}{a_1} \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b_1}{a_1}y - \dfrac{c_1}{a_1} \\ a_2\left(-\dfrac{b_1}{a_1}y - \dfrac{c_1}{a_1}\right) + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \text{enz.}$$

De vorm van algoritmisch denken of handelen die ontstaat als een leerling dergelijke oplossingsmethoden leert, wordt door Avital en Shettleworth (p. 6) omschreven als een denknivo waarop de leerling de beschikking heeft over welomschreven procedures of algoritmen ter oplossing van een bepaald type problemen. Men zou alle handelingen of operaties die verricht moeten worden netjes kunnen beschrijven in een soort handleiding bij dat type problemen. Houdt men zich aan het zo vastgelegde algoritme dan bestaat er oplossingsgarantie, d.w.z. men komt steeds tot de juiste oplossing. Geen enkele leerling zal nu bewust te werk gaan volgens zo'n 'handleiding'. De noodzakelijk te nemen stappen om tot een goede oplossing te komen worden als het ware door oefening ingeslepen en de leerling geeft op den duur de oplossing vrijwel automatisch.

Essentieel om met een algoritme te leren werken is dat de leerling weet te generaliseren van het ene probleem naar het andere. Dit generaliseren zal gemakkelijker zijn naarmate een volgend probleem minder van het voorgaande verschilt. Wie een leerling het algoritme uit opgave 2 wil leren, moet niet na opgave 1 meteen opgave 2 behandelen. Beter is een aantal tussenstappen te maken met opgaven die moeilijker zijn dan opgave 1 en makkelijker dan opgave 2. Algoritmisch denken wordt gekompliceerder naarmate de nieuwe opgaven meer van de voorgaande verschillen. Wie problemen als opgave 2 heeft leren oplossen, zal niet een twee drie een probleem kunnen oplossen als Opgave 3:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{y+7}{4} = 2 \\ 3 \cdot \dfrac{x-6}{y} = -5 \end{cases}$$

Het herkennen van het probleem als een dat met het algoritme van opgave 2 is op te lossen, is hier een opgave op zich.
We zullen nu een algoritme definiëren met de woorden van Landa (1969): Een algoritme is een oplossingsproces dat bestaat uit een serie operaties en beslissingen die, mits op de juiste wijze doorlopen, oplossingsgarantie biedt.

3 Open search

Van geheel andere aard zijn de problemen die Avital en Shettleworth aanduiden met 'open search'. Bij deze problemen heeft de leerling geen rechttoerechtaan procedures ter beschikking om gegarandeerd tot de oplossing te komen. De leerling zal de gegevens van het probleem op nieuwe wijze moeten rangschikken, er een nieuwe formulering aan moeten geven of de tussen die gegevens bestaande relaties moeten onderzoeken. Er is een exploratiefase nodig waarin relevante aspekten van het materiaal moeten worden opgespoord.
Een voorbeeld van dit soort problemen vinden we in de kannenproblemen van Luchins. In het eerste artikel (Van 't Riet, 1979) zijn deze problemen besproken in verband met de E-test, een instrument om setvorming te onderzoeken. De situatie bij deze problemen is zo dat de leerling vier getallen A, B, C en D aangeboden krijgt, die inhouden van kannen voorstellen. Met behulp van de kannen A, B en C moet nu de inhoud van kan D uit een kontainer vloeistof worden afgemeten. Bij het eerste kannenprobleem dat de leerling voorgelegd krijgt (bijvoorbeeld $A = 18$, $B = 64$, $C = 6$ en $D = 34$), beschikt hij niet over een oplossingsprocedure of algoritme. Hij moet maar eens wat proberen met de getallen A, B en C in de hoop dichter bij het getal D te komen. Zo kan hij $B - A$ uitrekenen of $A + 2C$. De oorspronkelijke gegevens, die louter getallen behelzen, worden zo als het ware opnieuw geformuleerd in termen van relaties die ertussen bestaan. Wellicht brengt deze explorerende aktiviteit de leerling dichter bij de oplossing, maar zeker is dit allerminst, daar dergelijke exploraties ook irrelevante gegevens kunnen opleveren. Er is dus geen aanpak met oplossingsgarantie voor deze problemen.
Bij de E-test is het nu zo dat de eerste vijf opgaven alle dezelfde oplossingsregel hebben ($B - A - 2C = D$). Gaandeweg gaat deze regel, de setregel, als een soort algoritme dienen. Voor de kannenproblemen in het algemeen is deze setregel echter een quasi-algoritme. Zodra er een kannenprobleem ver-

schijnt dat niet met de setregel is op te lossen falen vele leerlingen, omdat het 'algoritme' hen in de steek laat. De set verhindert een adekwaat funktioneren van de leerling zodra de kannenproblemen hun open-search karakter terugkrijgen.
Avital en Shettleworth merken op dat het nivo van de denkaktiviteiten die te pas komen aan open-search problemen psychologisch het minst goed beschreven en begrepen is. Alleen al daarom is het moeilijk een definitie van open search te geven. Eén belangrijk kenmerk is echter wel duidelijk geworden: het ontbreken van een algoritme met de bijbehorende oplossingsgarantie.

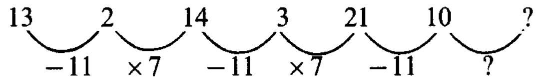
4 De eerste vraagstelling: Setvorming bij algoritmisch denken

In de voorgaande artikelen (Van 't Riet, 1979 en 1980) werd de E-test van Luchins besproken en een aantal onderzoekingen die daarmee zijn verricht. Tevens werd opgemerkt dat de kannenproblemen het enige soort aritmetische problemen is waarmee setvorming is onderzocht. In termen van beide vorige paragrafen betekent dit dat het onderzoek dat in het verleden verricht is, zich beperkt heeft tot *open-search* problemen. Het is echter een belangrijke vraag of setvorming ook een rol speelt bij taken die vallen onder het *algoritmische denken*. Hier ligt dus de eerste vraagstelling van ons onderzoek. Er zullen opgaven gevonden moeten worden die met behulp van algoritmen zijn op te lossen en waarmee setvorming onderzocht kan worden op overeenkomstige wijze als met de E-test. In paragraaf 5 zullen we deze problemen introduceren.

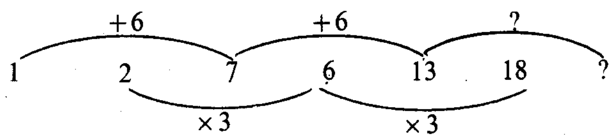
5 De gebruikte problemen

Wil men op grond van vraagstelling 1 setvorming bij algoritmisch op te lossen problemen onderzoeken op een overeenkomstige wijze als men dit bij open-search problemen doet met de E-test, dan moeten de gebruikte problemen aan drie eisen voldoen: (1) Er moeten setproblemen gemaakt kunnen worden, d.w.z. opgaven die alleen zijn op te lossen met een gekompliceerd setalgoritme; (2) Er moeten extinktieproblemen te maken zijn met dezelfde gedaante als de setproblemen, die echter alleen met een aanzienlijk eenvoudiger extinktiealgoritme zijn op te lossen; (3) Er moeten kritische problemen gemaakt kunnen worden die zowel met het setalgoritme als met het extinktiealgoritme zijn op te lossen.
Een type problemen dat hiervoor in aanmerking komt, was reeds bij de aanvang van het onderzoek voorhanden. De Leeuw (1979) gebruikte in zijn onderzoek naar de effekten van het aanleren van algoritmische en heuristische probleemoplossingsmethoden o.a. opgaven in het voortzetten van getallenrijen. Ook om onderzoeksvraagstellingen die buiten het bestek van dit artikel liggen, lag het voor de hand van deze problemen gebruik te maken. Zo sluit het onderzoek aan bij een breder skala van onderzoekingen, waardoor de relevantie ervan toeneemt.
Deze getallenrijproblemen voldoen zeer goed aan de drie bovenstaande eisen.

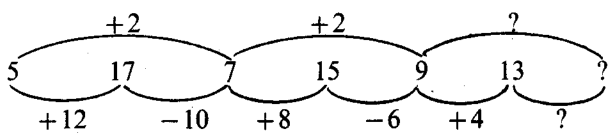
De *setproblemen* laten zich illustreren door
Opgave 1:



Het komt er op neer dat de rekenkundige relaties tussen de opvolgende termen van de rij onderzocht moeten worden met behulp van de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Uitdrukkelijk wordt gesteld dat men werkt binnen de verzameling van de natuurlijke getallen. Elke relatie wordt onder het getallenpaar genoteerd met het teken der toegepaste bewerking en het bijbehorende natuurlijke getal. Zo ontstaat onder de oorspronkelijke rij een nieuwe 'rij' met een gemakkelijk herkenbaar patroon. Hiermee is de volgende term van de rij te berekenen. Ook andere patronen van relaties zijn mogelijk, zoals bijvoorbeeld +1, ×2, +3, ×4, +5, ×6. Dit algoritme laat slechts daar enige onzekerheid waar zowel optellen als vermenigvuldigen of zowel aftrekken als delen mogelijk is. Wijst men de leerlingen er op steeds met beide mogelijkheden rekening te houden, dan levert dit in de praktijk nauwelijks moeilijkheden op.
De *extinktieproblemen* laten zich als volgt illustreren:
Opgave 2:



Hier worden dus de rekenkundige relaties tussen opvolgende termen met even, resp. oneven rangnummer onderzocht. Deze leveren twee afzonderlijke patronen op, die echter onderling konstant zijn. Men kan hier spreken van 'overspringen'. De oorspronkelijke rij is voort te zetten op grond van de relatie tussen de termen van de oneven subrij. Zo is het duidelijk dat het bij de extinktieproblemen om een veel eenvoudiger algoritme gaat dan bij de setproblemen. Daarnaast zijn er nog *kritische problemen* die zowel met het set- als met het extinktiealgoritme zijn op te lossen.
Opgave 3:



6 De tweede vraagstelling: De aard van de leerstofaanbieding

Nu de problemen waarmee het onderzoek uitgevoerd kan worden bekend zijn, kunnen we gaan denken aan de opzet van een soort 'E-test'. We zullen de proef-

personen (leerlingen) eerst een serie setproblemen moeten voorleggen, vervolgens een aantal kritische problemen en extinktieproblemen. *We moeten er dan wel zeker van zijn dat de proefpersonen in staat zijn die kritische problemen en die extinktieproblemen met behulp van het extinktiealgoritme te maken.* Voordat ze de setproblemen oplossen, moeten ze dus in ieder geval het extinktiealgoritme geleerd hebben. Dit betekent dat aan het eigenlijke experiment met de nieuwe E-test *een leerfase moet voorafgaan,* waarin de algoritmen geleerd en geoefend worden. Hierbij duikt een interessante vraag op. Is het mogelijk door middel van verschillende typen leerstofaanbieding de setvorming op de later te houden E-test te beïnvloeden? En welke *variaties in de leerstofaanbieding* kunnen hier van belang zijn?
Bedenken we dat bij het werken met slechts twee algoritmen (set- en extinktiealgoritme) het seteffekt hierin bestaat dat de proefpersoon vasthoudt aan één algoritme en niet op tijd de omschakeling naar het andere algoritme weet te maken, dan kan men zich afvragen of het mogelijk is door middel van een bepaald soort leerstofaanbieding de proefpersonen te leren deze omschakeling eerder te maken. Het ligt voor de hand dit na te streven door in de fase waarin de algoritmen geleerd worden de leerlingen te noodzaken regelmatig van het ene algoritme naar het andere over te stappen. We moeten dus in het onderzoek twee typen leerstofaanbieding opnemen: (1) Een waarbij eerst 'en bloc' het setalgoritme geleerd wordt en vervolgens 'en bloc' het extinktiealgoritme (2) Een waarbij het set- en extinktiealgoritme afwisselend worden uitgelegd en geoefend. We zullen het eerste type leerstofaanbieding BLOK-instruktie noemen, het tweede type MIXED-instruktie. In fig. 1 is schematisch weergegeven hoe beide instrukties zijn opgebouwd. Zorgvuldig moet erop gelet worden dat in beide kondities de beide algoritmen in gelijke mate aan bod komen.
De veronderstelling die we nu doen is, dat bij de MIXED-instruktie de proefpersonen het switchen van het ene naar het andere algoritme zullen leren, hetgeen op de daarna te houden E-test zal leiden tot een geringer seteffekt. Dit is de tweede vraagstelling van het onderzoek.

7 De opzet van het onderzoek

Het onderzoek voor zo ver het betrekking heeft op de hierboven behandelde vraagstellingen zal, zoals in paragraaf 6 duidelijk is geworden, moeten bestaan uit twee fasen: (1) Een leerfase waarin de algoritmen worden geleerd (2) Een fase van setvorming, waarin een soort E-test wordt afgenomen. Na enige kleine vooronderzoekjes op leerlingen van tweede klassen werd voor de uiteindelijke proefgroep van brugklassers de volgende opzet voor het onderzoek gerealiseerd.

7.1 De leerfase

In de leerfase moesten de proefpersonen de algoritmen leren met behulp van instruktieboekjes die ze geheel zelfstandig, eventueel met enige hulp van de proefleider, in ongeveer 25 minuten konden doornemen. Er werden

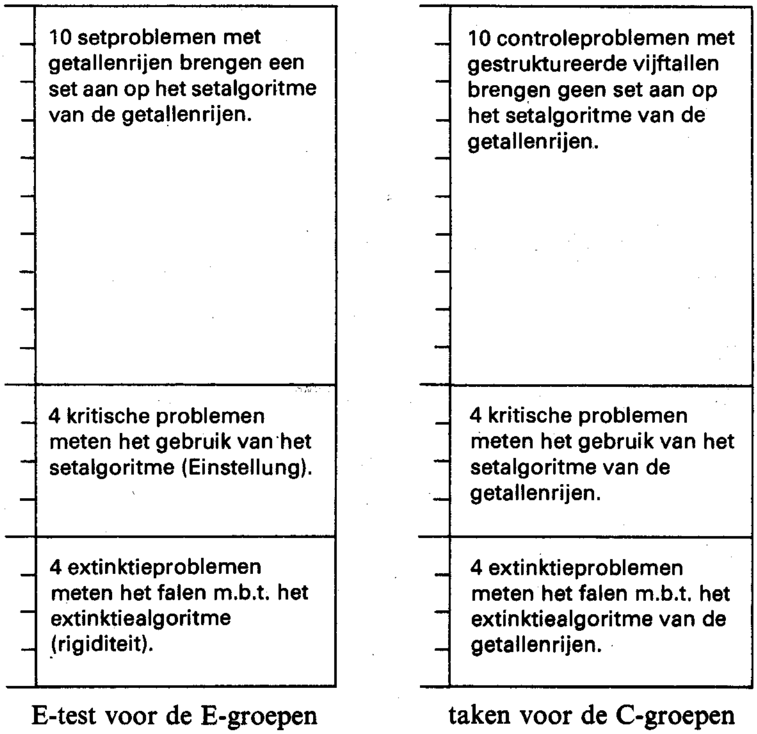
BLOK	MIXED
1 instruktie	1 instruktie
3 inleiding	3 inleiding
5 a/o setalg	5 a/o setalg
7 a/o setalg	7 a/o extalg
9 a/o setalg	9 a/o setalg
11 a/o setalg	11 a/o extalg
13 oef setalg	13 a/o setalg
13 oef setalg	15 a/o extalg
13 oef setalg	17 a/o setalg
15 a/o extalg	19 a/o extalg
17 a/o extalg	21 oef setalg
19 a/o extalg	21 oef extalg
21 a/o extalg	21 oef setalg
23 oef extalg	23 oef extalg
23 oef extalg	23 oef setalg
23 oef extalg	23 oef extalg

Figuur 1 De opbouw van de boekjes met de BLOK- en MIXED-instruktie voor het leren van het voortzetten van getallenrijen. Links zijn de paginanummers vermeld. a/o = aanwijzing/opdracht; oef = oefening; setalg = setalgoritme; extalg = extinktiealgoritme. Pag. 1 instruktie behelst enkele aanwijzingen voor het doornemen van het boekje.

twee typen boekjes gebruikt: (1) BLOK-getallenrijenboekjes; (2) MIXED-getallenrijenboekjes. Elk boekje bestond uit 24 pagina's. Op de oneven pagina's stonden de aanwijzingen en de opdrachten. De daarop volgende even pagina's gaven de antwoorden en extra opdrachten indien er een fout gemaakt was. Elke aanwijzing eindigde met een opdracht waarbij de leerling kon laten zien of hij de aanwijzing begrepen had. Het totale aantal opdrachten bij een foutloos 'parcours' was 15. Bij de BLOK-getallenrijenboekjes waren deze opdrachten als volgt verdeeld: één inleidende opdracht, zeven opdrachten voor het setalgoritme en zeven voor het extinktiealgoritme. In de MIXED-boekjes werd de afwisseling der beide algoritmen direkt vanaf hun introduktie doorgevoerd, waarbij telkens elke volgende opdracht het andere algoritme betrof. Bovendien waren de gebruikte opdrachten in de BLOK- en de MIXED-boekjes gelijk en verschilde alleen de volgorde waarin zij aan de proefpersonen werden aangeboden. De proefpersonen konden nu de boekjes in hun eigen tempo doornemen en indien nodig de proefleider om hulp vragen. De uitvoering van deze leerfase verliep zonder enig probleem.

7.2 De E-test met getallenrijproblemen

Voor de onderzoeksfase der setvorming moest nu vervolgens een E-test ontworpen worden bestaande uit getallenrijproblemen. De keuze van deze problemen hebben we in paragraaf 5 behandeld. Uit de resultaten van de vooronderzoekjes bleek dat een redelijk grote, maar niet te grote setvorming zou kunnen optreden als met tien setproblemen werd gewerkt. Wegens andere, hier niet behandelde vraagstellingen van het onderzoek bleek het tevens het beste te zijn na de setproblemen vier kritische problemen op te nemen en daarna nog eens vier extinktieproblemen. In fig. 2 is de zo opgebouwde E-test schematisch weergegeven. De uitslag van deze E-test zal nu bestaan uit twee scores, te weten een *kritische score* en een *extinktiescore*, beide in een range van 0 tot en met 4. Hierbij is alleen van belang of de proefpersoon het set- of het extinktiealgoritme gebruikt heeft. Een kritische score 3 wil dus zeggen dat de proefpersoon drie kritische problemen heeft opgelost met het setalgoritme. De kritische score is nu een *maat voor de Einstellung*, zoals we die in het eerste artikel (Van 't Riet, 1979) gedefinieerd hebben. Een kritische score 0 wil zeggen dat de proefpersoon geen Einstellung vertoont. Een kritische score 4 wil zeggen: maximale Einstellung.
Met de extinktiescore is de situatie iets anders. Een extinktiescore 2 wil zeggen dat de proefpersoon twee extinctieproblemen *niet* heeft kunnen oplossen, naar we aannemen onder invloed van het werken met het setalgoritme. De extinktieproblemen zijn zoals men weet uitsluitend met het extinktiealgoritme op te lossen. De extinktiescore wordt op deze wijze een *maat voor de rigiditeit*, zoals we die eveneens in het eerste artikel gedefinieerd hebben. Een extinktiescore 0 wil dus zeggen dat de proefpersoon geen rigiditeit vertoont, terwijl een extinktiescore 4 wil zeggen: maximale rigiditeit.
Twee komplikaties moeten nu nog vermeld worden. De eerste heeft te maken met de totstandkoming van de scores. Daar de scores bepaald worden door het al of niet gebruiken van een van beide algoritmen, zullen deze scores in hoge mate onbetrouwbaar worden als de proefpersonen tijdens het maken van de kritische problemen en de extinktieproblemen kunnen terugbladeren om reeds gegeven oplossingen te verbeteren of te veranderen. Daarom is een E-testboekje ontworpen met op elke oneven pagina een opgave. De proefpersonen krijgen voor elke opgave één minuut de tijd en moeten op aanwijzing van de proefleider allemaal tegelijk omslaan naar de volgende opgave. Terugbladeren is gedurende de gehele E-test verboden.
In de tweede plaats moet het de proefpersonen duidelijk zijn dat indien mogelijk de opgave moet worden opgelost met het eenvoudigste algoritme. Anders kunnen de proefpersonen de indruk hebben dat het de bedoeling van de proefleider is dat steeds hetzelfde algoritme gebruikt wordt. Ook mogelijk is dat ze in dat geval uitsluitend hun eigen voorkeur voor een bepaald algoritme gaan volgen. De instrukties voorafgaand aan de E-test moesten dan ook de proef-



Figuur 2 Schematische opbouw van de in het onderzoek gebruikte E-test en de taken voor de controlegroepen. Deze worden gelijktijdig afgenomen twee dagen na de leerstofaanbieding.

persoon uitdrukkelijk op het hart binden van de twee geleerde algoritmen als het zou kunnen steeds de gemakkelijkste te gebruiken. Dit meest gemakkelijk zijn werd de leerlingen verteld in termen van de manier die het minste rekenwerk vergde. Dit bleek in geen enkel geval tot misverstanden aanleiding te geven.
De zo ontworpen E-test werd ongeveer 48 uur na de instruktiefase afgenomen.

7.3 Controlegroepen

Op grond van bovenstaande hebben we voor ons onderzoek in ieder geval twee groepen nodig: Een die een BLOK-leerstofaanbieding krijgt en twee dagen later de E-test (groep GBE) en een die een MIXED-leerstofaanbieding krijgt en eveneens twee dagen daarna de E-test (groep GME). Op deze wijze kunnen we de tweede vraagstelling van het onderzoek evalueren. Er doet zich nu het volgende probleem voor.
In onze definitie van Einstellung (voor rigiditeit geldt m.m. hetzelfde) zijn twee uitdrukkelijke voorwaarden opgenomen (zie Van 't Riet, 1979). Er is pas sprake van Einstellung als (1) de proefpersonen na het maken van de setproblemen het setalgoritme blijven gebruiken bij het maken van de kritische problemen;

(2) de proefpersonen zonder het maken van de setproblemen direkt het extinktiealgoritme zullen gebruiken bij het maken van de kritische problemen. Deze tweede voorwaarde zegt in feite: Het gebruiken van het setalgoritme op de kritische problemen na het maken van de setproblemen wordt uitsluitend en alleen veroorzaakt door dit maken van de setproblemen en niet door iets anders (zoals b.v. een slechte leerstofaanbieding, sneller vergeten van het extinktiealgoritme of een te gering verschil in efficiëntie tussen set- en extinktiealgoritme). Om nu na te kunnen gaan in hoeverre de resultaten van het onderzoek aan die tweede voorwaarde voldoen, moeten we ook groepen opnemen die wel de kritische problemen en de extinktieproblemen maken, maar niet daaraan voorafgaand de tien setproblemen. Deze groepen maken dus van de E-test alleen de laatste acht problemen. We noemen deze groepen 'controlegroepen' en nemen er eveneens twee in het onderzoek op: Een die de BLOK-leerstofaanbieding krijgt en twee dagen later geen setproblemen, maar wel kritische en extinktieproblemen (groep GBC) en een die de MIXED-leerstofaanbieding krijgt en eveneens twee dagen later geen setproblemen, maar wel kritische problemen en extinktieproblemen (groep GMC). Als nu in de E-groepen signifikant hogere kritische scores en extinktiescores voorkomen dan in de C-groepen, dan kunnen we dit met recht wijten aan het maken van de setproblemen en mogen we van Einstellung en rigiditeit spreken. Hiermee is de opzet van het onderzoek ook geschikt geworden voor het evalueren van de eerste vraagstelling.

(Omdat alle proefpersonen op dezelfde wijze aan het onderzoek mee moesten doen, moesten de controleproefpersonen 'beziggehouden' worden, terwijl de E-testgroepen de tien setproblemen maakten. De controleproefpersonen kregen daarom in die tijd z.g. gestruktureerde vijftallen op te lossen, opdrachten die eenzelfde type rekenwerk vereisen als de setproblemen van de getallenrijen, maar verder geen enkele konnektie vertonen met het voortzetten van getallenrijen. In enigszins gewijzigde lay-out kwamen deze problemen neer op het vinden van de juiste hoofdbewerkingen om b.v. de uitdrukking (12 .. 3) .. (10 .. 8) = 2 kloppend te maken. In fig. 2 zijn de taken van de controlegroepen weergegeven, die zij maken terwijl de E-testgroepen de E-test maken.)

7.4 De indeling van de proefpersonen in vier kondities

In fig. 3 zijn de vier kondities van het onderzoek zoals het hierboven beschreven is, weergegeven en is het verband met de beide vraagstellingen uitgebeeld. Elke konditie hebben we gekodeerd met behulp van letters. De G staat voor getallenrijen, de B voor leerstofaanbieding BLOK, de M voor leerstofaanbieding MIXED, de E voor groepen die de E-test maken en C voor controlegroepen. Met GBE is dus de groep proefpersonen bedoeld die getallenrijen krijgen voort te zetten in de leerstofaanbieding BLOK en twee dagen later de E-test moeten afleggen. Op het eerste gezicht is de kodering G hier overbodig. In het volgende artikel echter zullen we een tweede gedeelte van het onderzoek bespreken, dat niet werd uitgevoerd met getallenrijen, maar met vermenigvuldiging van wortelgetallen. Dit gedeelte van het onderzoek had precies dezelfde opzet als het gedeelte met de getallenrijen. In plaats van vier kondities was er in het onderzoek dus sprake van twee maal vier kondities. De proefpersonen moesten dus in feite over acht kondities verdeeld worden.

	Getallenrijen			
Vraagstelling 2: Leerstofaanbieding	BLOK		MIXED	
Vraagstelling 1: Setvorming	E-test	C-taken	E-test	C-taken
Kodering van de vier kondities	GBE	GBC	GME	GMC
Aantal proefpersonen per groep	26	27	27	26

Figuur 3 De twee vraagstellingen van het onderzoek en de vier bijbehorende kondities (groepen proefpersonen). Ook vermeld is het aantal proefpersonen dat per konditie bij het onderzoek betrokken was en de voor elke konditie gebruikte kodering.

Een groep van bijna 240 leerlingen van de brugklas kwam in aanmerking om aan het onderzoek mee te doen. Deze groep moest nu over de acht kondities verdeeld worden op zodanige wijze dat er acht groepen van min of meer gelijke samenstelling zouden ontstaan. Er deed zich nu een moeilijkheid voor. In het vooronderzoek was gebleken dat afkijken bij de linker of rechter buur erg gemakkelijk was. Het gebruik van grote bogen bovenlangs de rij of kleine bogen onderlangs gaf een direkte indikatie voor het gebruikte algoritme bij de getallenrijproblemen. Dit zou een te grote invloed op de kritische scores en de extinktiescores kunnen hebben. Daar het onderzoek werd uitgevoerd in de gebruikelijke klassesituatie, werd daarom besloten de leerlingen die rechts zaten getallenrijen te geven en leerlingen die links zaten wortels. Daarmee was afkijken vrijwel uitgesloten.
Voorts moest er in verband met andere vraagstellingen voor gezorgd worden dat alle groepen proefpersonen een gelijk aantal jongens en meisjes bevatten. Tenslotte kon bij de verdeling van de leerlingen over de acht kondities gebruik gemaakt worden van DAT-intelligentiescores die aan het begin van het schooljaar door de school verkregen werden[3]). Op grond van de overweging dat schoolprestaties in de algebra op brugklas- en 2VWO-nivo het best gepredicеerd worden door de DAT-subtests Analogiën en Rekenvaardigheid (zie Dirkzwager, 1966, p. 163) werd de som van de stanines op deze subtest gebruikt om twee maal vier groepen van min of meer gelijke samenstelling te verkrijgen.
Elke leerling deed binnen het verband van zijn eigen klas aan het onderzoek mee. Ieder kreeg de boekjes van zijn eigen konditie uitgereikt en werkte die zelfstandig door. Na afloop van elke zitting werden de gebruikte boekjes ingenomen. Twee leerlingen moesten uit het onderzoek verwijderd worden wegens antwoorden waaruit niet was op te maken welke algoritmen zij ge-

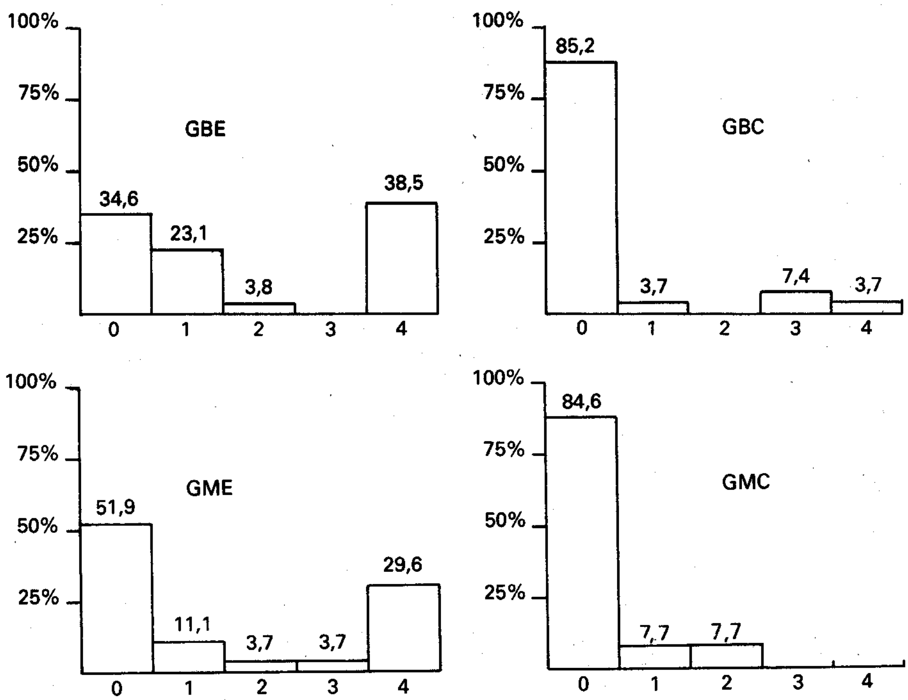
bruikt hadden. Mede hierdoor en door ziekte van leerlingen en doordat een aantal leerlingen voortijdig de school had verlaten zonder dat de proefleider hiervan op de hoogte was, variëerde de aantallen leerlingen in de acht kondities van 26 tot 30. Voor de preciese aantallen verwijzen we naar fig. 3.

8 Resultaten en diskussie

We zullen de resultaten van het onderzoek voor het geval van de Einstellung en dat van de rigiditeit apart bespreken.

8.1 Einstellung bij getallenrijen

In fig. 4 zijn de histogrammen afgebeeld van de scores op de kritische problemen in de getallenrijengroepen GBE, GBC, GME en GMC. We zien dat de E-groepen, die wel setproblemen kregen op te lossen, in aanzienlijke mate hoge kritische scores vertonen. Dit in tegenstelling tot de controlegroepen die geen setproblemen hebben opgelost. Deze verschillen tussen GBE en GBC enerzijds en GME en GMC anderzijds zijn signifikant met de verdelingsvrije toets van Wilcoxon voor twee aselekte steekproeven, eenzijdig getoetst met een



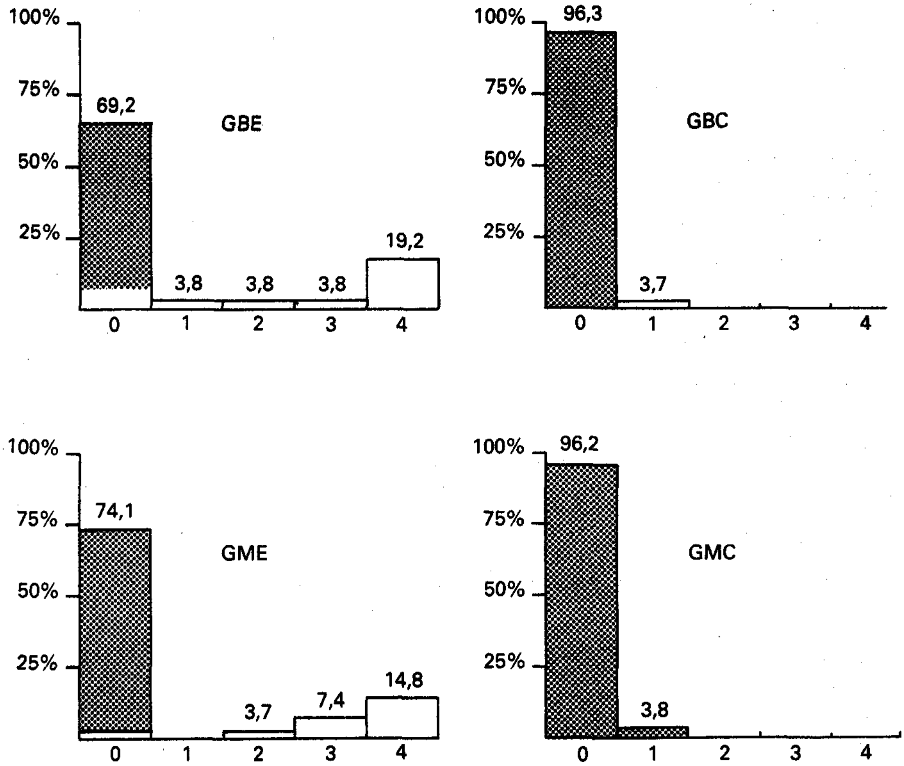
Figuur 4 Histogrammen van de kritische score (*Einstellung*) in percentages proefpersonen voor de vier getallenrijengroepen.

onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = .05$ (zie De Jonge en Wielenga, 1969, p. 248). We zullen deze toets in het vervolg kortweg aanduiden met 'Wilcoxon', eventueel met vermelding van andere waarden van α. In het onderhavige geval konkluderen we dat in zowel de BLOK- als de MIXED-konditie er sprake is van Einstellung: Het werken met het setalgoritme op de setproblemen verhindert vele proefpersonen bij de kritische problemen over te stappen op het extinktiealgoritme. Daarmee is de eerste vraagstelling van het onderzoek positief beantwoord. Ook bij algoritmisch denken treden verschijnselen van setvorming op en de mate waarin zij optreden is groot genoeg om verder onderzoek te rechtvaardigen.
Vergelijken we nu de twee soorten leerstofaanbieding dan zien we dat er bij de BLOK-leerstofaanbieding iets meer Einstellung optreedt dan bij de MIXED-leerstofaanbieding. Het verschil is echter niet signifikant, maar ligt wel in de verwachte richting. Immers in paragraaf 6 is de verwachting uitgesproken dat de proefpersonen bij de MIXED-leerstofaanbieding het switchen van het ene naar het andere algoritme zouden leren, hetgeen minder setvorming tot gevolg zou hebben. Omdat het gekonstateerde verschil niet signifikant is, mogen we de bij de tweede vraagstelling gedane veronderstelling niet bevestigd achten.
Samenvattend kunnen we stellen dat er bij algoritmische problemen als het voortzetten van getallenrijen een aanzienlijk seteffekt in de vorm van Einstellung mogelijk is. Er is vooralsnog geen reden om aan te nemen dat dit effekt door een MIXED-leerstofaanbieding in de leerfase effektief kan worden tegengegaan, hoewel daarmee een geringe verbetering te bespeuren valt.

8.2 Rigiditeit bij getallenrijen

Rigiditeit wordt zoals we in paragraaf 7.2 zagen, gemeten door de score op de extinktieproblemen. In fig. 5 zijn de histogrammen afgebeeld voor de getallenrijengroepen. In de kolommen boven de score 0 is gearceerd aangegeven het percentage proefpersonen dat op het vierde kritische probleem de set al overwonnen had. Het niet gearceerde gedeelte van de kolommen geeft dus de scores van de proefpersonen met kritische score 4. We zien duidelijk dat er in de E-testgroepen wel hoge extinktiescores optreden, in de controlegroepen niet. 'Wilcoxon' (zie paragraaf 8.1) levert echter geen signifikante verschillen op tussen de groepen GBE en GBC en tussen de groepen GME en GMC. In de afzonderlijke groepen GBE en GME is dus geen sprake van een signifikante rigiditeit. Voegen we deze twee groepen echter samen ($GBE \cup GME = GE$) evenals de twee controlegroepen ($GBC \cup GMC = GC$) dan vinden we in de totale E-testgroep GE bij eenzijdig toetsen met $\alpha = .05$ wel een signifikant hogere extinktiescore dan in de controlegroep GC. Hieruit blijkt dat we wel met enig recht mogen spreken over rigiditeit ten gevolge van het veelvuldig werken met het setalgoritme, ofschoon het om een effekt van geringe omvang gaat, dat pas bij grotere groepen proefpersonen van belang wordt. Het is voorts uit fig. 5 duidelijk dat het verschil in leerstofaanbieding (BLOK versus MIXED) het optreden van deze rigiditeit niet wezenlijk beïnvloedt.
Samenvattend kunnen we stellen dat er bij algoritmische problemen zoals het

voortzetten van getallenrijen slechts een gering seteffekt in de vorm van rigiditeit optreedt. Een MIXED-leerstofaanbieding levert geen bijdrage ter voorkoming van deze rigiditeit.



Figuur 5 Histogrammen van de extinktiescore (*rigiditeit*) in percentages proefpersonen voor de vier getallenrijengroepen. Het gearceerde gedeelte geeft het percentage proefpersonen aan, dat op de kritische problemen reeds de set doorbroken had.

8.3 Diskussie

De resultaten van het onderzoek tot dusver zijn niet opzienbarend. Dat setvorming kan optreden bij algoritmisch denken is geheel in overeenstemming met de verwachting. Elke ervaren leraar in de wiskunde zal regelmatig setachtige verschijnselen konstateren als hij zijn leerlingen een vraagstuk ziet oplossen. Echter het aantonen van setvorming in een experimentele situatie maakt dat het verschijnsel onder de kontrole van wetenschappelijk onderzoek te brengen is. Hierdoor wordt het mogelijk setvorming vanuit allerlei verschillende vraagstellingen en invalshoeken te onderzoeken. Dit onderzoek kan dan vervolgens weer resultaten opleveren die voor het onderwijs van belang kunnen zijn.

Wat de vraagstelling van de leerstofaanbieding betreft moeten we echter stellen dat het gebruik van een MIXED-leerstofaanbieding in het geval van het voortzetten van getallenrijen slechts in geringe mate de setvorming tegengaat. Het effekt is te klein om er konsekwenties voor het onderwijs aan te verbinden. We zullen evenwel in het volgende artikel zien dat dit resultaat in hoge mate afhankelijk is van de *keuze van de leerstof*. Bij minder gekompliceerde problemen zoals het vermenigvuldigen van wortelgetallen worden geheel andere resultaten verkregen. Wat de getallenrijen aangaat zal er gezocht moeten worden naar andere vormen van leerstofaanbieding ter voorkoming van setvorming, verondersteld dat voorkoming mogelijk is. Hiertoe bestaan er momenteel een aantal nog weinig omlijnde ideeën, die we in verder onderzoek hopen uit te werken.

Zoals reeds vermeld zullen we in een volgend artikel het 'tweede deel' van het onderzoek bespreken, dat andere resultaten te zien gaf.

Noten

1 Dr. L. de Leeuw is wetenschappelijk hoofdmedewerker aan de subfakulteit Psychologie van de Vije Universiteit te Amsterdam en heeft het onderzoek waarvan in dit artikel een gedeeltelijk verslag wordt gedaan in alle fasen intensief begeleid.

2 Bij deze zeggen wij dank aan leiding en kollega's van het Comenius College te Hilversum en met name aan de konrektrix mevrouw H. J. Dengerink voor de bereidwillige medewerking bij het uitvoeren van het onderzoek.

3 Hierbij danken we Drs. W. W. Pott van de Stichting School- en Beroepskeuze te Hilversum voor zijn medewerking met betrekking tot het onderzoeksmateriaal.

Literatuur

Avital, S. M., Shettleworth, S. J., *Objectives for mathematics learning, Bulletin 3*, Ontario Institute for Studies in Education, Ontario, 1968.

Bloom, B. S., e.a., *Taxonomy of educational objectives, Handbook I: Cognitive domain*, Longman, Green and Co, New York, 1956.

Dirkzwager, A., *Intelligentie en schoolprestaties*, Swets en Zeitlinger, 1966.

Jonge, H. de, Wielenga, G., *Statistische methoden voor psychologen en sociologen*, 3e druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.

Landa, L. N., *Algorithmierung im Unterricht*, Volk und Wissen, Berlijn, 1969.

Leeuw, L. de, *Leren probleemoplossen*, Swets en Zeitlinger, Lisse, 1979.

Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, I Einstellung en rigiditeit bij het oplossen van wiskundige vraagstukken*, Euclides 1979, 55, p. 41-49.

Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, II De aard van de leerervaring*, Euclides 1980, 55, p. 308-316.